МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права

Ковалева Л.Ф.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Москва 2001

УДК – 519.1
ББК – 22.176
К – 56

Ковалева Л.Ф. Дискретная математика / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики – М., 2001 г., 84с.

Содержание

Введение

Данное пособие рассчитано на читателя, впервые знакомящегося с курсом дискретной математики, основными понятиями Булевой алгебры и теории графов.

В первой части пособия изложены основные понятия теории множеств и алгебры высказываний, простейшего основного раздела математической логики. Во второй части пособия изложены сведения из теории графов, рассмотрены задачи по определению экстремальных путей на графе, что позволяет решить такие задачи экономического содержания, как построение самого дешевого нефтепровода, определение скорейшего времени завершения проекта и др.

В целом изложенный в пособии материал является одной из основ построения математических методов в экономике.

Данное пособие не претендует на исчерпывающую полноту и абсолютную строгость изложенного материала.

Раздел 1. Операции над множествами. Алгебра Буля

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством.

Объекты, объединенные одним общим свойством, называют элементами множества и обозначают a, b, c, ... x, y, z. Множества обозначают A, B, C, ... X, Y, Z. Запись $a \in A$ означает, что элемент "a" принадлежит множеству A, $b \notin A$ означает, что элемент "b" не принадлежит множеству A.

Множество, число элементов которого конечно, называют конечным и бесконечным в противном случае.

Конечные множества разделяются на счетные и несчетные. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется счетным и несчетным в противном случае. Так множество четных чисел - счетное, множество действительных чисел - несчетное.

Конечные и счетные множества называются дискретными множествами.

Дискретная математика - математика дискретных множеств.

Если каждый элемент множества A есть в месте с тем элемент множества B, то множество A называется частью, или подмножеством множества B и обозначается $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называются равносильными и обозначаются A=B.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается V, $\varnothing$. Пустое множество считают конечным множеством и подмножеством любого множества.

Любое множество есть подмножество самого себя. Такое подмножество так же, как и пустое, называют несобственными подмножествами в отличии от всех других подмножеств, которые называют собственными.

<u>Пример</u>. Пусть $A=\{a_1, a_2, a_3\}$. Подмножества $\{a_1, a_2, a_3\}$ и V - несобственные подмножества A. Собственные: $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$.

Число подмножеств любого конечного множества, содержащего “n” элементов, равно 2^n.

Множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании, называют универсальным и обозначают “U”.

На множествах определены следующие операции.

Объединением, или суммой множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

$$C=A \cup B=\{c_i : c_i \in A \text{ или } c_i \in B\}$$

Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

$$C=A\cap B=\{c_i : c_i\in A \text{ и } c_i\in B\}$$

Дополнением $\overline{A}$ множества A есть множество, элементы которого принадлежат универсальному множеству U и не принадлежат A.

$$C=\overline{A}=\{c_i : c_i\in U \text{ и } c_i\notin A\}$$

Данные три основные операции обладают следующими свойствами.

1. $A\cup A=A$
2. $A\cap A=A$

} идемпотентность

3. $A\cup B=B\cup A$
4. $A\cap B=B\cap A$

} коммутативность

5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
6. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

} ассоциативность

7. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
8. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

} дистрибутивность

9. $A\cup U=U$
10. $A\cap V=V$
11. $A\cap U=A$
12. $A\cup V=A$
13. $A\cup\overline{A}=U$
14. $A\cap\overline{A}=V$
15. $\overline{\overline{A}}=A$
16. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
17. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

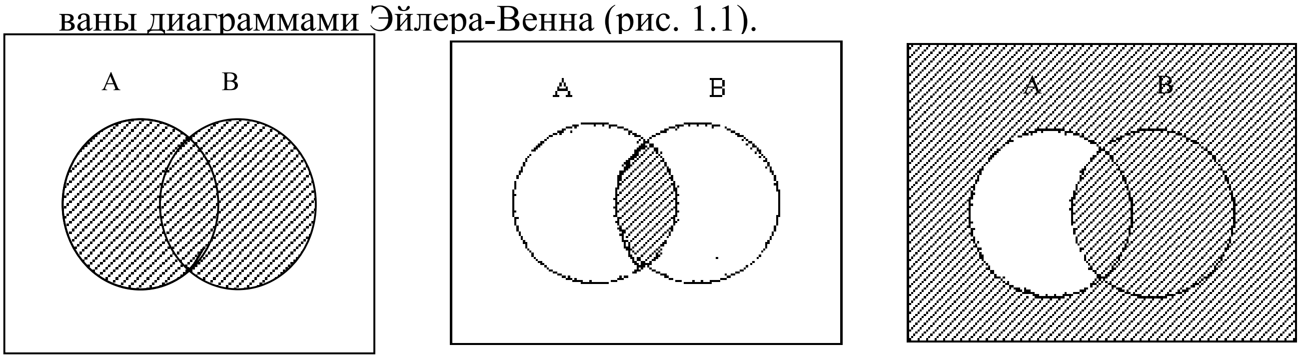
} законы де Моргана

18. $\overline{V}=U$
19. $\overline{U}=V$
20. $A\subset B$ равносильно $\overline{B}\subset\overline{A}$

Соотношения 1-20 обладают свойствами двойственности: если в одной из формул поменять местами $\cup$ и $\cap$, U и V, $\subset$ и $\supset$, то получим другую формулу из этого списка.

Порядок выполнения операций:
дополнение (‾), пересечение ($\cap$), объединение($\cup$).

Названные операции и свойства к ним могут быть проиллюстрированы диаграммами Эйлера-Венна (рис. 1.1).



$A\cup B$ $A\cap B$ $\overline{A}$

Рис. 1.1

Абстрактная алгебраическая система подмножеств некоторого универсального множества с введенными для них операциями объединения, пересечения, дополнения, обладающая перечисленными выше свойствами, образует Булеву алгебру.

К операциям над множествами относятся также:

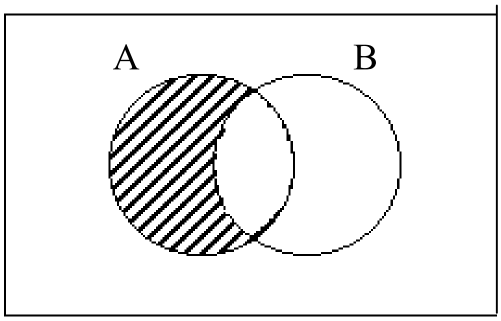
1. Разность множеств A\ B - множество, состоящее из элементов множества A и не принадлежащих множеству B.

$$C=A\setminus B=\{c_i : c_i\in A \text{ и } c_i\notin B\}$$

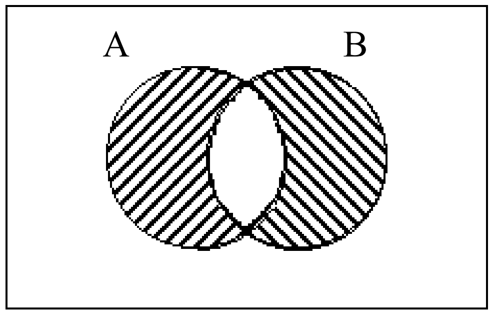
Очевидно, что справедлива формула $C=A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

2. Симметрическая разность $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Эти операции можно проиллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 1.2).



A \ B



A Δ B

Рис. 1.2

Декартово (прямое) произведение множеств A и B: A×B=C.

3. Декартовым произведением A×B является множество C всех упорядоченных пар $<a_i,b_j>$, где $a_i\in A$, $b_j\in B$, т.е.

$$C=A\times B=\{<a_i,b_j> : a_i\in A \text{ и } b_j\in B\}$$

Иллюстрацией декартова произведения множеств $A=\{a_1,a_2\}$и $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ является рис. 1.3.

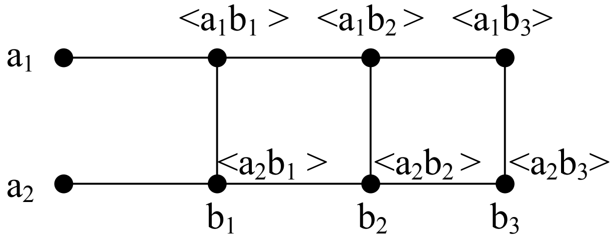


Рис. 1.3

В общем случае декартовым произведением множеств A_1, A_2, ... A_n называется множество

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{<a_1, a_2, \dots a_n> : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_n \in A_n\}$$

Рассмотрим несколько упражнений, помогающих усвоить приведенные выше понятия.

Упражнение 1.1

Пусть заданы три числовых множества A={2,3,4,10}, B={1,2,10,12}, C={1,9,10}. Требуется указать элементы множеств

а) $A \cap B \cup B \cap C = D$ б) $(A \cup C) \setminus (B \cap A) = E$

Множество "D" есть объединение двух множеств $A \cap B$ и $B \cap C$, что следует из порядка выполнения действий.

$A \cap B = \{2,10\}$, $B \cap C = \{1,10\}$ и $D = \{1,2,10\}$

Множество "E" есть разность между объединением $A \cup C$ и пересечением $B \cap A$.

$A \cup C = \{1,2,3,4,10,12\}$, $B \cap A = \{2,10\}$ и $E = \{1,3,4,12\}$

Упражнение 1.2

Пусть множество A состоит из точек M(x,y) плоскости, для которых $|x| \le 4$ и $|y| \le 4$, множество B - из точек плоскости, для которых $x^2+y^2 \le 25$, C - из точек плоскости для которых x>0. Требуется изобразить множество $A \cap B \setminus C$.

Как следует из условия, множество A есть квадрат, B - круг, C - полуплоскость. Решение приведено на рис. 1.4.

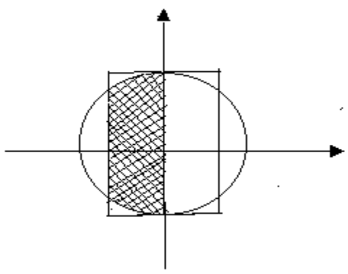


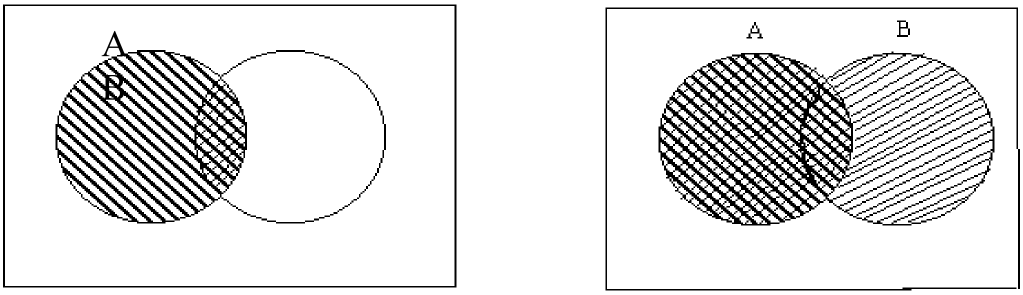
Рис. 1.4

$A \cap B$ - "обрезанный квадрат, обведенный на рисунке жирной линией.

$A \cap B \setminus C$ - множество точек, полученное удалением из $A \cap B$ точек полуплоскости x>0. Результат изображен на рис. 1.4 штриховкой .

Упражнение 1.3

На диаграмме Эйлера-Венна убедиться в справедливости формул: $A \cup A \cap B = A$ и $(A \cup B) \cap A = A$.



A∩B
A

A∪B
A

Рис. 1.5

Данные формулы называют формулами поглощения, т.к. $A\cap B\subset A$ в первой формуле и $A\subset A\cup B$ во второй.

Формулы поглощения помогают в преобразованиях, упрощающих выражения, задающие некоторые множества.

Упражнение 1.4

Упростить выражение

$$S=\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cup A\cap B\cap\overline{C}}\cap\overline{(A\cup B\cup C)\setminus(A\setminus C)}$$

В преобразованиях будем пользоваться списком свойств операций над множествами и формулами поглощения. Знак "∩" в записи формул часто опускают.

S представляет собой произведение двух дополнений. Преобразуем каждое из них. По закону де Моргана имеем

1) $S1=\overline{\overline{A\overline{B}}\cup AB\overline{C}}$

Затем вновь ко второму сомножителю применяем закон де Моргана, а к первому- свойство $\overline{\overline{A}}=A$.

Получим $S1=A\overline{B}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{\overline{C}})=A\overline{B}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)=A\overline{B}$.

Последний результат получен с использованием формулы поглощения:

$$\overline{B}(\overline{B}\cup(\overline{A}\cup C))=\overline{B}$$

2) $S_2=\overline{(A\cup B\cup C)\setminus(A\setminus C)}=\overline{(A\cup B\cup C)\cap(\overline{\overline{A\overline{C}}})}$, так как дважды заменяем разность равносильной формулой $A\setminus B=A\cap\overline{B}$. Далее вновь применяем закон де Моргана:

$$S_2=\overline{A\cup B\cup C)}\cup\overline{\overline{A\overline{C}}}=\overline{ABC}\cup A\overline{C}$$

Вынесем за скобки, используя дистрибутивный закон 7, $\overline{C}$.

$$S_2 = \overline{\overline{C}(\overline{AB} \cup A)}$$

К выражению, стоящему в скобках, применим дистрибутивный закон 8:

$$A \cup \overline{AB} = (A \cup \overline{A})(A \cup \overline{B}) = U(A \cup \overline{B}) = A \cup \overline{B}$$

Следовательно, $S_2 = \overline{\overline{C}}(A \cup \overline{B})$

Итак, $S = S_1 \cap S_2 = A\overline{B}\overline{C}(A \cup \overline{B}) = A\overline{B}\overline{C}$, т.к. по формуле поглощения $\overline{B}(A \cup \overline{B}) = \overline{B}$.

Помимо формул поглощения в преобразованиях использовались формулы склеивания $A \cup \overline{A}B = A \cup B$ и $\overline{A} \cup AB = \overline{A} \cup B$, одна из которых была доказана в преобразованиях этого упражнения.

Упражнение 1.5

Доказать справедливость следующего равенства и проверить результат на диаграммах Эйлера-Венна.

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

Заменяя разность равносильной формулой, легко приходим к результату:

1) $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \cap \overline{C} = AB\overline{C}$

2) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap B \cap \overline{AC} = AB(\overline{A} \cup \overline{C}) =$
$AB\overline{A} \cup AB\overline{C} = V \cup AB\overline{C} = AB\overline{C}$

(Использовали закон де Моргана, дистрибутивный закон №7, закон №14: $A \cap \overline{A} = V$, закон №10: $V \cap A = \varnothing$, закон №12: $A \cup V = A$.)

Иллюстрируем справедливость этого равенства на диаграммах Эйлера-Венна.

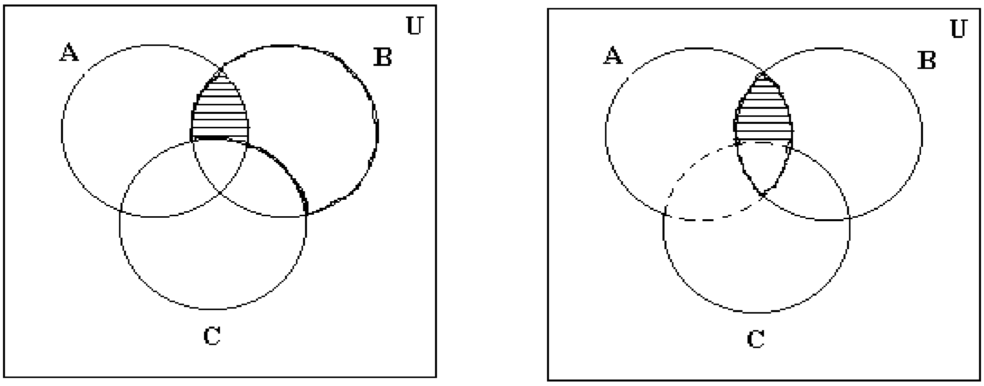


Рис. 1.6

Область B\C обведена жирной линией, а область A∩(B\C) заштрихована.

Область A∩B обведена жирной линией, A∩C - пунктиром, а область (A∩B)\(A∩C) заштрихована.

Упражнение 1.6

Среди 100 деталей прошли обработку на первом станке 42 штуки, на втором - 30 штук, а на третьем - 28. Причем на первом и втором станках обработано 5 деталей, на первом и третьем - 10 деталей, на втором и третьем - 8 деталей, на всех трех станках обработано три детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

В качестве универсального выберем множество всех деталей. Число его элементов равно 100. Пусть A - множество деталей, обработанных на первом станке, B - на втором, C - на третьем. Число элементов множества A обозначим n(A). Оно равно 42, т.е. n(A)=42. Аналогично, n(B)=30, n(C)=28. Обратимся к диаграмме (рис. 1.7).

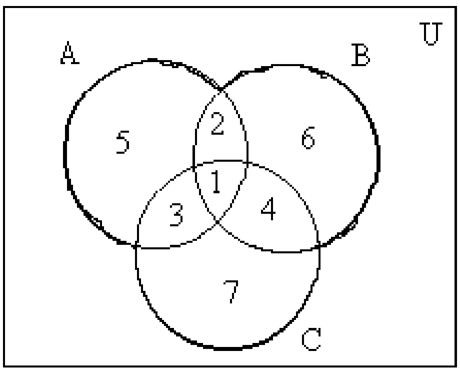


Рис. 1.7

Обведенное на чертеже жирной линией множество A∪B∪C есть множество деталей, обработанных хотя бы на одном из станков. Оно разбито на 7 непересекающихся подмножеств, обозначенных на чертеже цифрами. Область 1 есть множество деталей, прошедших обработку на всех трех станках, т.е. множество $A \cap B \cap C$. По условию задачи $n(A \cap B \cap C)=3$. Множество деталей, обработанных на первом и втором станках, т.е. $A \cap B$, есть сумма областей, помеченных цифрами 1 и 2. Причем область 2 - множество деталей, обработанных только на первом и втором станках.

По условию задачи $n(A \cap B)=5$. Следовательно, число деталей, обработанных только на первом и втором станках, равно 5-3=2. Аналогично, число элементов множества, обозначенного цифрой 3, есть число деталей, прошедших обработку на первом и третьем станках, оно равно $n(A \cap C)$ - $n(A \cap B \cap C)=10-3=7$. Число деталей, прошедших обработку только на втором и третьем станках (область 4), равно $n(B \cap C)$ - $n(A \cap B \cap C)=8-3=5$.

Область, помеченная на чертеже цифрой 5, есть множество деталей, обработанных только на первом станке. Число элементов этого множества получим, если из числа всех обработанных на первом станке деталей вычесть число деталей, обработанных одновременно на первом и втором, а также на первом и третьем станках, в том числе и на всех трех станках, 42-(3+2+7)=30.

Аналогично можно определить число деталей, обработанных только на втором станке (область 6), 30-(3+2+5)=20, а также только на третьем (область 7) 28-(3+7+5)=13. Число всех обработанных деталей, т.е. $n(A \cup B \cup C)$, получим, если сложим число элементов всех областей с 1 по 7. Оно равно 80. Дополнением к нему является множество необработанных деталей $U \setminus A \cup B \cup C = \overline{A \cup B \cup C}$, $n(\overline{A \cup B \cup C})=100-80=20$.

Заметим, число элементов непересекающихся множеств A и B (т.е. множеств, для которых выполняется условие $A \cap B=V$) отличается от числа элементов пересекающихся множеств. Рассмотрим пример.

Упражнение 1.7

Лекции по экономике посещают 20 студентов, по математике - 30. Найти число студентов, посещающих лекции по экономике или математике, если 1) лекции проходят в одно и то же время, 2) лекции проходят в разные часы и 10 студентов слушают оба курса.

Очевидно, в первом случае имеем дело с непересекающимися множествами, т.к. студентов, посещающих оба курса, не существует, т.е. $A \cap B=V$, если A - множество студентов, посещающих лекции по математике, B - по экономике. Следовательно $n(A \cap B)=0$, а $n(A \cup B)= n(A)+ n(B)=20+30=50$.

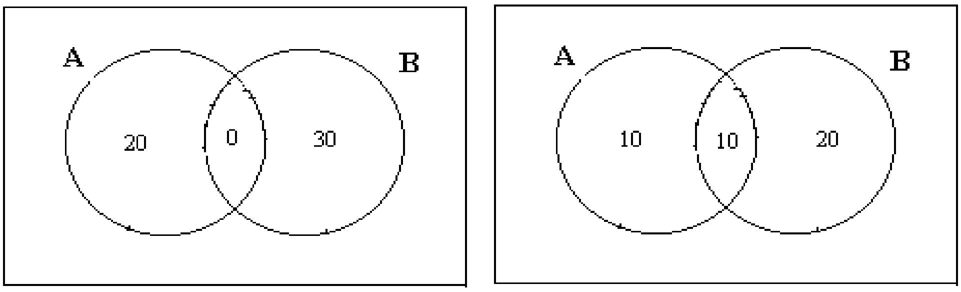


Рис.1.8

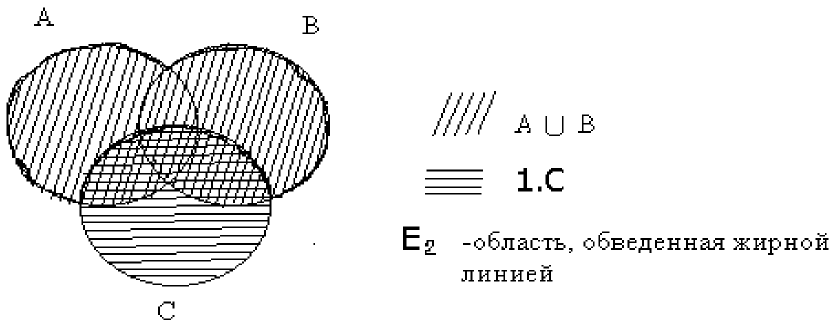
Во втором случае, число студентов, посещающих лекции только по математике, - 10, т.к. из 20 человек 10 слушают оба курса. Аналогично только экономику слушают 20 человек из общего числа студентов, равного 30.

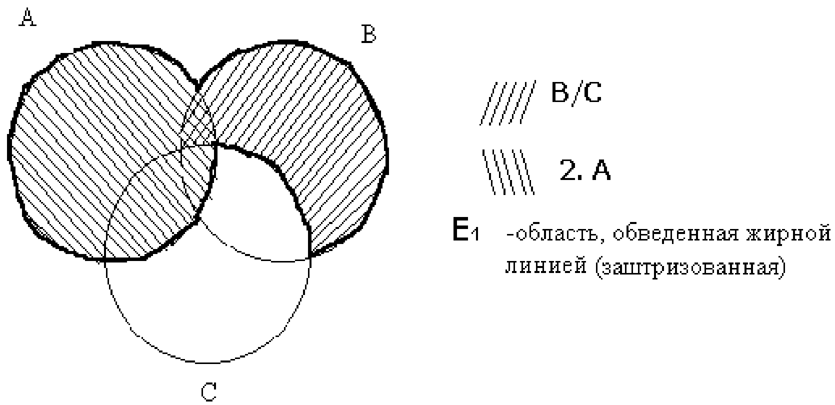
Следовательно, лекции по математике или экономике слушают 40 человек или $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Графическое решение задачи приведено на рис. 1.8.

Эта формула - простейший вариант формулы включений и исключений, отвечающая на вопрос о сумме любого числа пересекающихся множеств $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k)$. Так для $k=3$ получим

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

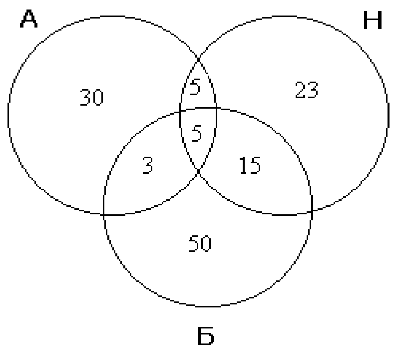
В качестве примера слушателям предлагается получить формулу для $k=4$.

<table>
<tr><th>Тренировочные задания к разделу 1</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>1. Какое из множество $E_1=A\cup(B\setminus C)$ и $E_2=(A\cup B)\setminus C$ есть подмножество другого?
а) $E_1\subset E_2$;
б) $E_2\subset E_1$;
в) Ни одно из множеств не является подмножеством другого.</td><td>


</td></tr>
<tr><td>∅
2. Упростить выражение:
$S=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)\setminus(A\cup(B\setminus C))\cap A$
Получим в результате:

а) $B\setminus A$;
б) $A\setminus B$;
в) $A\cup B$.</td><td>1. $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)=A\cup B$
2. $(A\cup(B\setminus C))\cap A=A$
3. $S=(A\cup B)\setminus A=(A\cup B)\cap\overline{A}= \quad \cup B\cap\overline{A}=B\setminus A$

Ответ: B\A(а).</td></tr>
</table>

Тренировочные задания к разделу 1	Решение
3. В отчете об обследовании студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих немецкий, французский и английский языки таково: все три языка изучают 5 человек, немецкий и английский - 10, французский и английский - 8, немецкий и французский - 20, английский язык - 30 человек, французский - 50, немецкий - 23. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему? Отчетные данные противоречивы по группе, изучающей а) английский язык; б) французский язык; в) немецкий язык.	$n(A \cap H) = 10; n(A \cap H \cap \Phi) = 5; n(A \cap H) - n(A \cap H \cap \Phi) = 10 - 5 = 5$ $n(A \cap \Phi) = 8; n(A \cap \Phi) - n(A \cap H \cap \Phi) = 8 - 5 = 3.$ $n(H \cap \Phi) = 20; n(H \cap \Phi) - n(A \cap H \cap \Phi) = 20 - 5 = 15.$ $n(A) = 30; n(H) = 23; n(\Phi) = 50$  Только английский язык изучает 30-13=27 человек. Только французский язык изучает 50-23=27 человек. Только немецкий язык изучает 23-(15+5+5)=- 2человека. Ответ: Данные по изучающим немецкий язык противоречивы (в).

Тест

1. Будет ли пустое множество V каким-либо подмножеством некоторого множества?

а) будет собственным подмножеством;

б) будет несобственным подмножеством;

в) не будет никаким подмножеством.

2. Что есть множество A\B, если A - множество всех книг в библиотеке МЭСИ по различным отделам науки и искусства, а B - множество всех книг во всех библиотеках России?

а) множество математических книг в России без математических книг в МЭСИ;

б) множество книг по искусству в библиотеке МЭСИ;

в) множество книг в библиотеке МЭСИ по искусству и науке, кроме математических.

3. Совпадают ли дистрибутивные законы Булевой алгебры и алгебры действительных чисел;

а) оба совпадают;

б) оба не совпадают;

в) один совпадает, другой - нет.

4. Вытекает ли из равенства $A \setminus B = C$ что $A = B \cup C$?

а) да;

б) нет;

в) вообще нет, но в частной случае да.

5. Есть ли законы для дополнений в алгебре действительных чисел?

а) да;

б) нет;

в) некоторые есть, некоторых нет.

6. Справедливы ли законы идемпотентности Булевой алгебры в алгебре действительных чисел?

а) справедливы;

б) несправедливы;

в) один справедлив, другой нет.

7. Обладают ли свойством двойственности формулы поглощения?

а) да;

б) нет;

в) одна обладает, другая нет.

8. Можно ли поставить в соответствие единицу или ноль соответственно универсальному и пустому множеству, исходя из свойств операций?

а) можно;

б) единицу - можно, ноль - нет;

в) ноль - можно, единицу - нет.

9. Обладают ли формулы склеивания свойством двойственности

а) нет;

б) да;

в) одна обладает, другая нет.

10. Будет ли каждое из множеств A, B, C, D подмножеством другого, если A - множество действительных чисел, B - множество рациональных чисел, C - множество целых чисел, D - множество натуральных чисел.

а) да;

б) нет;

в) лишь некоторые из множеств являются подмножествами перечисленных множеств.

Раздел 2. Отображение множеств. Мощность множества. Отношения

2.1. Отображение множеств

Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$, то говорят, что определено отображение f множества X во множество Y. Обозначают $y=f(x)$. Элемент y есть образ элемента x при данном отображении f, x - прообраз элемента y и обозначают $x = f^{-1}(y)$.

Частным случаем отображения множества X во множество Y является отображение множества X на множество Y. Отображение f множества X в Y является отображение множества X на Y, если каждому элементу $y \in Y$ был поставлен в соответствие какой-либо элемент $x \in X$ при данном отображении f. Такое соотношение называется сюръективным, т.е. если каждый элемент множества y имеет прообраз, то отображение f сюръективно.

Пусть $X=\{a, b, c, d\}$ $Y=\{2, 4, 6\}$. Зададим отображения f_1 и f_2 так:

$$f_1: \begin{array}{l} a\to 2 \\ b\to 4 \\ c\to 4 \\ d\to 6 \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{l} a\to 2 \\ b\to 2 \\ c\to 6 \\ d\to 6 \end{array}$$

т.е.

$$\begin{array}{llll} f_1(a)=\{2\} & f_1^{-1}(2)=\{a\} & f_2(a)=\{2\} & f_2^{-1}(2)=\{a,b\} \\ f_1(b)=\{4\} & f_1^{-1}(4)=\{b,c\} & f_2(b)=\{2\} & f_2^{-1}(4)=\{\varnothing\} \\ f_1(c)=\{4\} & f_1^{-1}(6)=\{d\} & f_2(c)=\{6\} & f_2^{-1}(6)=\{c,d\} \\ f_1(d)=\{6\} & & f_2(d)=\{6\} & \end{array}$$

Отображение f_1 X в Y является сюръективным, т.е. отображением X на Y, т.к. каждый элемент множества Y имеет прообраз. Отображение f_2 несюръективно, элемент "4" не имеет прообраза.

Отображение X в Y называется инъективным, если для каждого элемента $y \in Y$ существует не более одного прообраза. Приведенные выше отображения f_1 и f_2 не являются инъективными.

$$X=\{x_1, x_2, x_3\} \quad Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \quad f_3: \begin{array}{l} x_1\to y_1 \\ x_2\to y_2 \\ x_3\to y_4 \end{array}$$

Отображение f_3 - инъективно.

Если отображение f сюръективно и инъективно, оно называется биективным (взаимнооднозначное соответствие).

Очевидно, биективное отображение между конечными множествами X и Y возможно только в случае, когда число элементов этих множеств совпадает.

Примером биективного отображения для бесконечных множеств может служить отображение f, установленное между множеством натурального ряда чисел A={1, 2, 3, ... n, ...} и множеством четных положительных чисел B={2, 4, 6, ...} по типу $n \leftrightarrow 2n$.

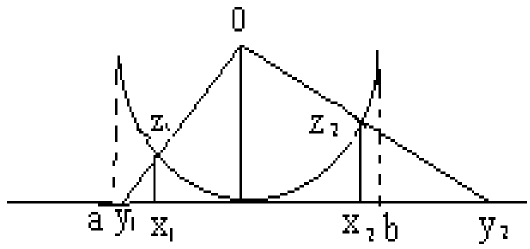


Рис. 2.1

На рис. 2.1 показана возможность установления биективного отображения между множеством Z точек полуокружности и множеством X точек открытого отрезка (a, b), а также между множеством Z и множеством Y точек прямой - множеством Y.

$z, z_1 \in Z$; Множества X, Y, Z - несчетные.

$x, x_1 \in X$;

$y, y_1 \in Y$.

Упражнение 2.1

Установить биективное отображение между множеством A={1, 6, 11, 16, 21, ...} и натуральным рядом чисел.

Очевидно, это можно сделать, поставив в соответствие элементу натурального ряда "n" $a_n = 1+5(n-1) \in A$, т.е. $n \leftrightarrow 1+5(n-1)$.

Упражнение 2.2

Установить биективное отображение между множеством точек плоскости и множеством точек сферы, из которой выброшена одна точка.

Очевидно, это можно сделать геометрически (рис. 2.2):

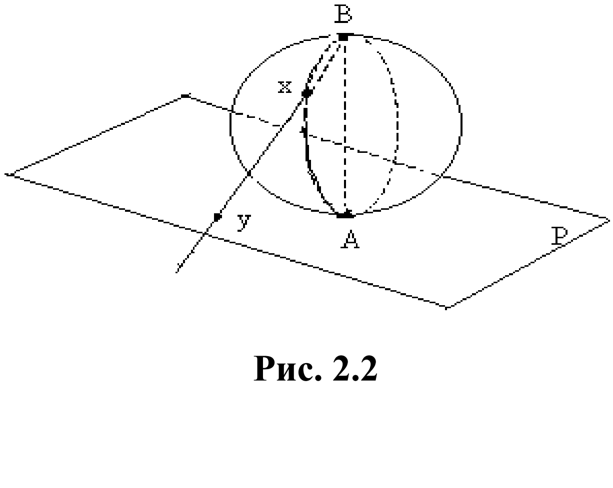


Рис. 2.2

Обозначим множество точек плоскости Р, множество точек сферы - М, точка А выброшена из сферы, $x \in M$, $y \in P$.

Чтобы установить биективное отображение между М и Р достаточно соединить точку В лучом с точкой "х" и получить соответствующую точку "у", или точку В соединить с точкой "у" и получить соответствующую точку "х", т.е. "х"$\leftrightarrow$"у".

2.2. Мощность множества

Два множества называются количественно эквивалентными (или просто эквивалентными), если между ними можно установить биективное отображение.

Исходя из этого определения можно дать другую формулировку счетного множества: счетным называется множество, эквивалентное натуральному ряду чисел.

Очевидно, что справедливы следующие утверждения:

1. Конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.
2. Два множества, порознь эквивалентные третьему, эквивалентны между собой.
3. Все счетные множества эквивалентны между собой.
4. Всякое множество, эквивалентное счетному множеству, счетно.

О двух эквивалентных множествах говорят, что они имеют одинаковую мощность.

Мощность - это то общее, что есть у эквивалентных множеств. Что общего имеют эквивалентные множества? Общим для них является число элементов. Мощность конечного множества есть число его элементов. Для бесконечных множеств является аналогом количества его элементов.

Все счетные множества имеют мощность, равную мощности натурального ряда чисел. Мощность натурально ряда чисел обозначается $\aleph_0$ - алеф-нуль.

Мощность континуума обозначается готической буквой С. Между этими мощностями существует следующая связь: $C = 2^{\aleph_0}$.

Как сравниваются мощности?

Рассмотрим два множества А и В. Если между ними можно установить биективное отображение, то мощности данных множеств равны. Если между множеством А и частью множества В можно установить биективное отображение, а между Множеством В и частью А нельзя, то мощность множества А меньше мощности множества В.

Для конечных множеств это положительно очевидно. Для бесконечных множеств оно также справедливо.

Мощность натурального ряда чисел - меньшая среди мощностей всех бесконечных множеств. Следующая по величине - мощность континуума. Пытаясь найти множество, мощность которого была бы промежуточной между мощностями континуума и натурального ряда чисел, Георг Кантор, основатель теории множеств, сформулировал так называемую гипотезу континуума - предложение, отрицающее множество промежуточной мощности. Попытки доказать это предложение привели к серьезным теоретическим исследованиям, связанным с пересмотром оснований математики.

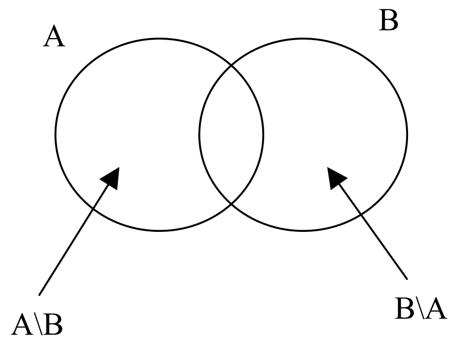
Множества наибольшей мощности не существует, т.к. мощность множества подмножеств исходного множества всегда больше мощности исходного множества.

Упражнение 2.3

Доказать, что если A\B эквивалентно B\A, то A и B эквивалентны (рис. 2.3).

Решение: $A=(A\backslash B)\cup A\cap B$

$B=(B\backslash A)\cup A\cap B$



Если (A\B) и (B\A) эквивалентны, то между элементами этих множеств существует биективное отображение. Элементы множества $(A\cap B)$ поставим в соответствие самим себе. Следовательно, между элементами множеств A и B существует биективное отображение, т.е. A и B эквивалентны, т.е. мощности множеств A и B одинаковы.

Сформулируем некоторые основные теоремы, справедливые для счетных множеств.

Теорема 1.Всякая часть счетного множества есть либо конечное, либо счетное множество.

Теорема 2. Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть счетное множество.

Теорема 3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Теорема 4. Если М - несчетное множество, а $A \subset M$ есть конечное или счетное множество, то множества М и $M \setminus A$ эквивалентны.

Теорема 5. Присоединяя к некоторому бесконечному множеству М, счетному или несчетному, счетное или конечное множество А, получим множество $M \cup A$, эквивалентное множеству М.

Теорема 6. Всякое бесконечное множество М содержит часть $A \subset M$, эквивалентную всему множеству М.

Теорема 7. Множество всех пар натуральных чисел счетно. Под парой натуральных чисел понимают два натуральных числа, расположенных в определенном порядке.

Теорема 8. Множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 9. Множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов данного счетного множества, есть счетное множество.

Теорема 10. Множество всех алгебраических чисел счетно.

Теорема 11. Множество континуума несчетно.

2.3. Отношения на множестве (эквивалентность, толерантность, порядок)

Предложения "x - брат y", "$x<y$" выражают отношения между объектами некоторого множества.

Первое предложение свидетельствует, что два объекта "x" и "y" принадлежат общему классу - сыновья общих родителей. Второе предложение выражает относительный порядок в системе.

Об отношении можно говорить тогда, когда можно выделить множество объектов, на которых это отношение определено.

Приведенные примеры есть бинарные отношения (они выполняются для пары объектов). Тернарные отношения определены для трех объектов, n-арные - для n объектов.

Отношением А на множестве М называют подмножество А множества $M \times M$. Если $\langle x,y \rangle$ входит в А, то обозначают xAy ($\langle x,y \rangle \in A$). Эта запись читается так: "x находится в отношении А с y".

Итак, отношением называется упорядоченная пара $\langle A,M \rangle$, где $A \subseteq M \times M$, М - множество, на котором определено отношение, А - множество пар, для которых это отношение определено. (Рассматриваем бинарные отношения).

Обратимся к примеру, Зададим отношение "x_i - победитель y_j" в шахматном турнире из пяти игроков x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, турнир игрался в один круг. Данные приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	0
x_2	0	0	1	1	1
x_3	0	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0

$i^{\underline{ая}}$ строка соответствует элементу x_i, $j^{\underline{ый}}$ столбец элементу x_j, на их пересечении ставится 1, если отношение x_iAx_j выполнено, и 0, если нет. Так единица, стоящая на пересечении $4^{\underline{ой}}$ строки и $1^{\underline{го}}$ столбца соответствует тому, что игрок x_4 выиграл у игрока x_1, т.е. $<x_4Ax_1>$.

Итак, на множестве $M(x_1, \ldots x_5)$ отношение "x_i - победитель y_j" задано матрицей

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если выполнено } x_iAx_j \\ 0, \text{ если не выполнено } x_iAx_j \end{cases}$$

Такая матрица полностью задает отношение A на множестве M. Прямое произведение M×M представлено двадцатью пятью элементами матрицы (табл. 2.1).

Если $a_{ij} \equiv 0$ $(i, j = \overline{1, n})$, то имеем пустое отношение, т.е. такое, которое не выполнено ни для какой пары x_ix_j. Если $a_{ij} \equiv 1$, имеем полное отношение, т.е. отношение, выполненное для всех пар. Единичная матрица E задает диагональное отношение, отношение равенства: $<x_iAx_j>$, если $xi=xj$.

Зададим отношение другим способом, а именно: элементы множества изобразим точками, проведем стрелку от x_i к x_j, если выполнено x_iAx_j, получим фигуру - ориентированный граф (рис. 2.4).

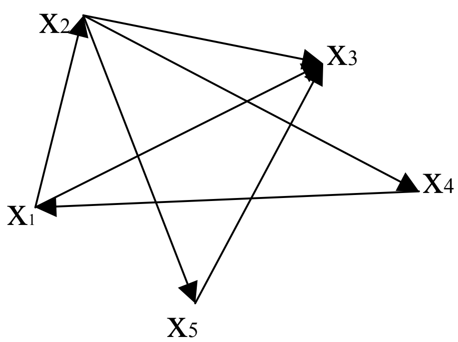


Рис. 2.4

Точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - вершины графа, направленные линии - ребра графа.

Элементы теории графов рассмотрим во второй части данного пособия.

Свойства отношений:

1) Отношение A рефлексивно, если оно выполнено между объектом и им самим, т.е. xAx.

Отношения "быть похожим", "быть знакомым" - рефлексивны. Отношение "быть братом" - нерефлексивно.

2) Если отношение A может выполняться лишь для несовпадающих объектов, то оно антирефлексивно, т.е. из xAy следует, что $x \neq y$.

3) Отношение A называется симметричным, если при выполнении xAy выполнено yAx.

Отношения "быть родственником", "быть похожим на" - симметричны.

4) Отношение A называется антисимметричным, если из двух отношений xAy и yAx хотя бы одно не выполнено. Так приведенный выше пример, отношение "x - победитель y" - антисимметрично.

Справедлива теорема: если отношение антисимметрично, то оно антирефлексивно.

5) Отношение называется транзитивным, если при выполнении xAy и yAz выполнено xAz.

Примером является отношение "быть больше (меньше)". Так, если $x<y$ и $y<z$, то $x<z$.

6) Отношение A называется антисимметричным, если оба соотношения xAy и yAx выполняются только тогда, когда $x=y$.

Эквивалентность. Отношение эквивалентности определяется отображением множества X на множество Y и характеризуется разбиением множества X на классы.

Множество X разбито на классы, если его можно представить в виде суммы непересекающихся подмножеств:

$$X=X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \text{ где } X_k<X \ (k=\overline{1,n}) \text{ и } X_i \cap X_j = V \ (i \neq j) \ (i,j=\overline{1,n}).$$

Так множество X учащихся десятых классов некоторой школы разбивается на два класса: X_1 - учащиеся $10^{\underline{А}}$ класса, X_2 - учащиеся $10^{\underline{Б}}$ класса. $X=X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = V$, т.к. нет учеников, обучающихся одновременно и в $10^{\underline{А}}$ и в $10^{\underline{Б}}$ классе.

Два элемента множества X эквивалентны, если они принадлежат одному и тому же классу.

Каждая пара учащихся $10^{\underline{A}}$ класса - эквивалентные элементы множества X_1 (также, как и пара $10^{\underline{Б}}$ - X_2).

Разбивая множество X на классы, мы осуществили сюръективное отображение множества всех учащихся X на множество Y, состоящее из двух элементов $y_1=10^{\underline{A}}$,$y_2=10^{\underline{Б}}$. Причем $f^{-1}(y_1) = X_1$, $f^{-1}(y_2) = X_2$.

Другой пример - составление каталога по алфавиту. Множество всех книг в библиотеке X разбивается на конечное число классов - количество букв алфавита Y. Книги, начинающиеся с одной и той же буквы, принадлежат одному классу и между любой парой таких книг существует отношение эквивалентности.

В то же время составляется каталог по алфавиту, мы осуществляем сюръективное отображение множества всех книг в библиотеке X на множество букв алфавита Y.

Отношение эквивалентности - рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эти свойства являются необходимыми и достаточными условиями разбиения множества на классы.

Отношение A на множестве M называется ***толерантностью***, если оно рефлексивно и симметрично.

Так отношение "быть знакомым" соответствует определению толерантности.

Отношение A на множестве X называется ***отношением порядка***, если оно транзитивно и антирефлексивно.

Отношение порядка характеризует соотношение объектов друг к другу по старшинству, по важности, оно не является симметричным. Отношение $x<y$ на множестве действительных чисел - есть пример отношения порядка.

Множество, на котором задано отношение порядка, называется упорядоченным множеством. Понятие конечного упорядоченного множества совпадает с понятием конечной последовательности, состоящей из различных элементов. Простейшими примерами бесконечных упорядоченных множеств, является множество всех целых чисел, множество рациональных чисел.

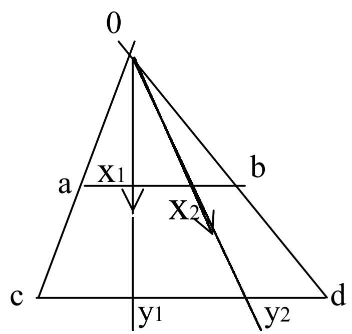
Замети, что одно и то же множество можно упорядочить многими различными способами. Так, например, натуральные числа можно упорядочить "естественным образом": 1, 2, 3, 4, ... Это же множество можно упорядочить так, что отдельно нечетные и отдельно четные числа расположены в порядке возрастания, а все нечетные числа считать предшествующими четным, т.е. 1, 3, 5, ... 2, 4, 6, ...

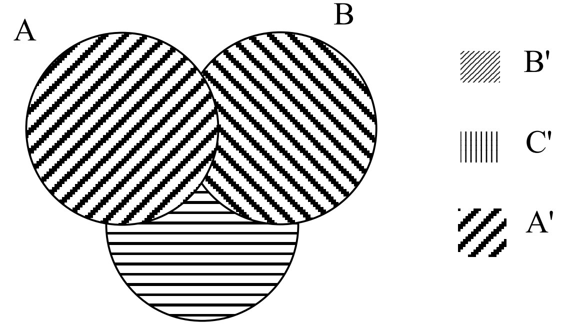
Биективное отображение “f” упорядоченном множестве X на упорядоченное множество Y, называют соответствием подобия или подобным соответствием, если оно сохраняет порядок.

Два упорядоченных множества называются подобными, или имеющими один и тот же порядковый тип, если одно из них можно подобно отобразить на другое. Так, два конечных упорядоченных множеств X и Y, состоящих из одного и того же числа элементов, подобны между собой. Указанные выше биективное отображение между всей числовой прямой и интервалом (a,b) является соответствием подобия и указанные множества подобны (рис. 2.1).

Заметим, что подобные множества имеют одну ту же мощность.

Упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если каждое его непустое подмножество содержит первый элемент. Так, все конечные упорядоченные множества - вполне упорядочены. Примером бесконечного вполне упорядоченного множества является множество всех натуральных чисел.

Тренировочные задания к разделу 2	**Решение**
1. Заданы множества X={x_1, x_2, x_3, x_4} Y={y_1, y_2, y_3, y_4}. Поставим элементы множества X в соответствие элементам множества Y следующим образом: $x_1 \rightarrow y_3$ $x_2 \rightarrow y_2$ $x_3 \rightarrow y_1$ Будет ли данное соответствие а) сюръективным отображением X на Y; б) инъективным отображением X на Y; в) не будет отображением X на Y.	Данное соответствие не будет отображением X в Y, так как множество образов элемента X_4 пусто.
2. Заданы два разновеликих отрезка a |———| b и c |————| d. Что можно сказать о мощности множества точек этих отрезков? а) мощность [a, b] > мощности [c, d]; б) мощность [a, b] = мощности [c, d]; в) мощность [c, d] > мощности [a, b].	Мощность [a,b] = мощности [c,d], так как существует биективное отображение одного множества на другое. Точка $X_1 \in$ [a,b] соответствует $Y_1 \in$[c,d]. Точка $Y_2 \in$[c,d] соответствует $X_2 \in$ [a,b]. 

Тренировочные задания к разделу 2	Решение
3. Даны три пересекающихся множества A, B, C. Можно ли сумму этих пересекающихся множеств разбить на три класса A', B', C' так, чтобы $A \cup B = A' \cup B'$ и $A \cup B \cup C = A' \cup B' \cup C'$. а) можно; б) нельзя; в) можно, но не всегда.	$A' = A$ $B' = B \setminus A = B \setminus A'$ $C' = C \setminus (A' \cup B')$  Ответ: Можно (а).

Тест

1. Задано отображение f множества X в Y.

$$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}\ Y=\{y_1, y_2, y_3\}:$$
$$f(x_1)= y_1,\ f(x_2)= y_2,\ f(x_3)= y_2,\ f(x_4)= y_3,$$

Будет ли это отображение f

а) сюръективно;

б) инъективно;

в) биективно.

2. Можно ли в любом бесконечном множестве выделить счетное подмножество?

а) нельзя;

б) можно;

в) можно, но не всегда.

3. Выделим в бесконечном множестве M счетное подмножество $A \subset M$. В каком отношении находятся мощности множеств M \ A и M?

а) мощность M \ A < мощности M;

б) мощность M < мощности M \ A;

в) мощность M = мощности M \ A.

4. Отношение "быть старше": "x старше y" является

а) рефлексивным;

б) симметричным;

в) асимметричным.

5. Отношение "x - победитель y" является

а) антирефлексивным;

б) симметричным;

в) транзитивным.

6. Каково максимально возможное число классов, на которое можно разбить сумму трех пересекающихся множеств, не прибегая к произвольному делению отдельных областей на диаграммах Эйлера-Венна?

а) 3;

б) 5;

в) 7.

7. Если отношение А на множестве М рефлексивно, симметрично и транзитивно, можно ли разбить множество М на классы?

а) да;

б) нет;

в) можно, но не всегда.

8. Пусть на множестве М задано отношение А: "х знаком с у". Почему нельзя разбить множество М на классы?

а) отношение А не рефлексивно;

б) отношение А не симметрично;

в) отношение А не транзитивно.

9. Почему множество действительных чисел и множество натуральных чисел не являются подобными?

а) множество натуральных чисел неупорядочено;

б) множество действительных чисел неупорядочено;

в) нет биективного соответствия между множествами.

10. Почему множество М точек отрезка [0, 1] не является вполне упорядоченным множеством?

а) М не упорядочено;

б) не все подмножества М содержат первый элемент;

в) ни одно из подмножеств М не содержат первый элемент.

Раздел 3. Алгебра высказываний

3.1. Математическая логика

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений.

Простейшую из формальных логических теорий называют алгеброй высказываний. Из высказываний состоит любое логическое рассуждение. Высказывание - предложение, относительно которого можно утверждать, истинно оно или ложно. Так, предложение "5>1", "13 делится на 5" - высказывания. Но "Который час?", "Да здравствует математика!" - не являются высказываниями в связи с данным определением. Если высказывание истинно (ложно) в любой логической ситуации, то оно называется тождественно истинным (ложным), или логической константой, обозначаемой соответственно И(Л). Высказывания, истинные в одних логических ситуациях и ложные в других, называются переменными высказываниями. Все приведенные выше высказывания представляют собой так называемые элементарные высказывания.

3.2. Логические операции

Обозначим элементарные высказывания латинскими буквами A, B, C, ... , X, Y, Z ...

Конъюнкция. Обозначается $A \wedge B$ ($A\&B$, AB), читается: A и B. Получили сложное высказывание, составленное из двух элементарных. Значение истинности или ложности высказывания, являющегося конъюнкцией двух элементарных высказываний A и B, задается следующей истинностной таблицей:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Все рассматриваемые в дальнейшем логические связи будут задавать с помощью аналогичных истинностных таблиц.

Чаще пользуются более удобным обозначением: "И" - 1, "Л" - 0. В эти обозначениях истинностная таблица конъюнкции будет иметь вид

Таблица 3.1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Итак, конъюнкция двух элементарных множеств истинна тогда и только тогда, когда оба элементарных высказывания истинны.

Дизъюнкция. Обозначается $A \vee B$, читается: А или В. При этом разделительный смысл союза "или" исключается. Истинностная таблица дизъюнкции имеет вид:

Таблица 3.2

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкция двух элементарных высказываний является ложным высказыванием тогда и только тогда, когда оба высказывания, ее составляющие, ложны.

Отрицание. Единственная логическая операция, относящаяся к одному высказыванию, - унарная, в отличии от остальных - бинарных. Обозначается: $\overline{A}$ (>A, ~A), читается: не А. Истинностная таблица имеет вид:

Таблица 3.3

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Импликация. Обозначается $A \to B$ ($A \subset B$), читается: если А, то В. При этом А называют посылкой, В - следствием. Импликация задается следующей истинностной таблицей:

Таблица 3.4

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка А истинна, а следствие В - ложь.

Двойная импликация. Обозначается $A \leftrightarrow B$ ($A \sim B$), читается: А тогда и только тогда, когда В. Задается следующей истинностной таблицей:

Таблица 3.5

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Двойная импликация является истинностным высказыванием тогда и только тогда, когда высказывания А и В, ее составляющие, принимают одинаковое значение истинности или ложности.

Приведем пример Пусть А и В - элементарные высказывания: А - "Этот четырехугольник - параллелограмм", В - "Этот четырехугольник - ромб". Образуем из этих двух элементарных высказываний сложные, используя перечисленные логические связки.

Сложное высказывание $A \wedge B$, очевидно, читается так: "Этот четырехугольник есть параллелограмм и ромб". Значения истинности и ложности этого высказывания определяется таблицей 3.1. Это высказывание считают истинным в том и только в том случае, когда оба высказывания А и В - истинны.

Дизъюнкция указанных высказываний $A \vee B$ читается: "Этот четырехугольник есть параллелограмм или ромб". Значение истинности и ложности этого высказывания определяется таблицей 3.2. Очевидно, для импликации и двойной импликации получим соответственно $A \to B$: "Если этот четырехугольник есть параллелограмм, то он - ромб"; $A \leftrightarrow B$ "Этот четырехугольник есть параллелограмм тогда и только тогда, когда он - ромб". Значение истинности или ложности этих высказываний определяется таблицами 3.4 и 3.5. Отрицание к А, т.е. $\overline{A}$, есть высказывание: "Неверно, что этот четырехугольник есть параллелограмм" или "Этот четырехугольник не параллелограмм".

Пользуясь указанными логическими связками, их истинностными таблицами, можно построить сколь угодно сложное высказывание и найти его истинностную таблицу.

Заметим, что число строк истинностной таблицы, очевидно, равно 2^n, где n - число строк равно 4 (таблицы 3.1 - 3.5).

Упражнение 3.1

Построим истинностную таблицу сложного высказывания:

$$S = (A \to B) \wedge C \vee \overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$$

Очевидно, истинностная таблица будет содержать $2^3 = 8$ строк. Скобки применяются, если нарушаются естественный порядок операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, двойная импликация. Скобки (A→B) указывают на то, что сначала нужно выполнить импликацию, затем найти (A→B)∧C. Скобки в выражении $\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$ можно опустить. Заключительной операцией в построении истинностной таблицы для S будет дизъюнкция двух высказываний: (A→B)∧C и $\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$.

Таблица 3.6

A	B	C	A→B	(A→B)∧C	$\overline{C}$	$A \leftrightarrow \overline{C}$	$\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$	
1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1

Итак, формула S задает высказывание которое истинно на следующих наборах значений элементарных высказываний:

A=1 B=1 C=1 (все три элементарных высказывания истинны)
A=1 B=0 C=1 (A, C - истинны, B - ложно)
A=0 B=1 C=1 (A - ложно, B и C - истинны)
A=0 B=1 C=0 (B - истинно, A и C - ложны)
A=0 B=0 C=1 (C - истинно, A и B - ложно)
A=0 B=0 C=0 (все три высказывания ложны).

3.3.Формулы алгебры высказываний

Будем пользоваться следующими символами A, B, C, ... , X, Y, Z ...

– переменные высказывания, 0, 1, И, Л - const, ∧, ∨, →, ↔,
– символы соответствующих логических операций.

Дадим определение формулы алгебры высказываний:

1) отдельно стоящая буква A, B, C, ... , X, Y, Z ... - формула.
2) если A, B - формулы, то формулами являются и ($\overline{A}$), ($\overline{B}$), (A∧B), (A∨B), (A→B), (A↔B).
3) Других формул нет.

Очевидно, сложное высказывание выше разобранного примера задано формулой S.

Две формулы алгебры высказываний называются равносильными, если на всех одинаковых наборах значений составляющих переменных высказываний они принимают одинаковые значения 1 или 0.

Упражнение 3.2

Следующие высказывания могут быть интерпритированы как составные. Указать элементарные высказывания их составляющие, написать формулы данных высказываний и построить истинностные таблицы. Указать, какие из высказываний равносильны.

S_1: X неверно сделал расчет или если Y считал задачу правильно, то и Z сделал это без ошибок.

S_2: Если X правильно просчитал задачу, то либо Y ошибся, либо Z сделал ее верно.

S_3: Либо X неверно просчитал задачу, либо Y решил ее верно в том и только в том случае, если Z решил ее верно.

Очевидно, данные сложные высказывания составлены из следующих элементарных.

A: X правильно просчитал задачу

B: Y правильно просчитал задачу

C: Z правильно просчитал задачу

Используя основные логические связки, запишем формулы данных высказываний.

$$S_1 = \overline{A} \vee (B \to C) \quad S_2 = A \to (\overline{B} \vee C) \quad S_3 = \overline{A} \vee (B \leftrightarrow C)$$

Составим истинностные таблицы данных высказываний:

Таблица 3.7

A	B	C	$B \to C$	S_1	$\overline{B} \vee C$	S_2	$B \leftrightarrow C$	S_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Из таблицы 3.7 видно, что высказывания S_1 и S_2 равносильны: $S_1 = S_2$.

Приведем список основных равносильных формул алгебры высказываний:

1. $A \vee A = A$
2. $A \wedge A = A$ — идемпотентность
3. $A \vee B = B \vee A$
4. $A \wedge B = B \wedge A$ — коммутативность
5. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
6. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ — ассоциативность
7. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — дистрибутивность
9. $A \vee И = И$
10. $A \wedge Л = Л$
11. $A \wedge И = A$
12. $A \vee Л = A$
13. $A \vee \overline{A} = И$ закон исключенного третьего
14. $A \wedge \overline{A} = Л$
15. $\overline{\overline{A}} = A$
16. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
17. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ — законы де Моргана
18. $\overline{Л} = И$
19. $\overline{И} = Л$

Отметим, что операции импликации и двойной импликации можно заменить дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, используя следующие равносильные формулы:

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

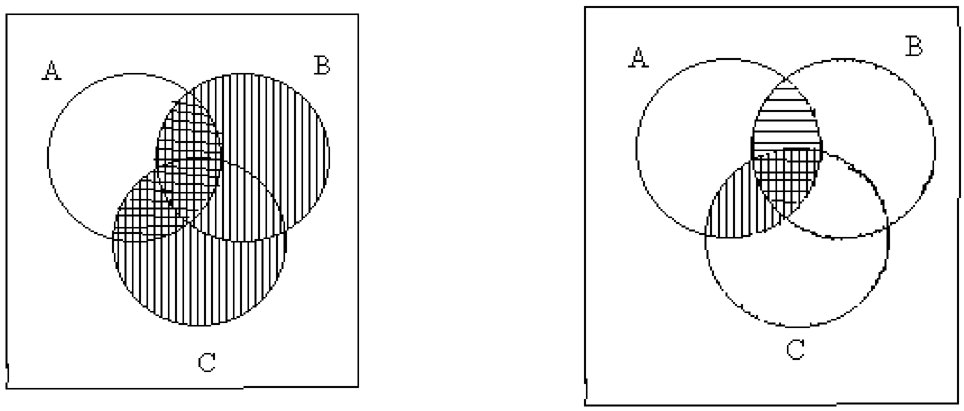
$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$

$$A \leftrightarrow B = AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$$

Рассмотрим множество всех логически возможных случаев, множество всех возможных логических ситуаций для высказываний, связанных с некоторой проблемой, - некоторое универсальное множество. Поставим в соответствие каждому переменному высказыванию некоторое подмножество универсального множества логических возможностей и назовем его множеством истинности данного высказывания. Множество истинности данного высказывания содержит в качестве своих элементов все те логически возможные случаи, когда данное высказывание является истинным.

Высказыванию, истинному во всех логически возможных случаях, т.е. логической константе, обозначаемой 1 или И, будет соответствовать универсальное множество. Высказыванию, ложному во всех логически возможных случаях, т.е. логической константе, обозначаемой 0 или Л, будет соответствовать пустое множество. Тогда дизъюнкции двух высказываний будет соответствовать объединение (сумма) их множеств истинности, конъюнкции - пересечение их множеств истинности, а отрицанию к высказыванию - дополнение к множеству истинности данного высказывания. Учитывая это и сравнивая список основных равносильных формул алгебра высказываний со списком свойств основных операций над множествами, убеждаемся в том, что операции алгебры высказываний образуют Булеву алгебру.

Заметим следующее: для того, чтобы убедиться в равносильности двух формул, можно построить их истинностные таблицы и убедиться в их совпадении. Равносильность формул можно установить также, убедившись в совпадении множеств истинности рассматриваемых высказываний. Так в справедливости закона дистрибутивности №7 можно убедиться, изобразив на диаграммах Эйлера-Венна множества истинности левой и правой части равенства (рис. 3.1).



$A \wedge (B \vee C)$ — $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$(B \vee C)$ — $(A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee C)$ — $(A \wedge B)$

Рис. 3.1.

Установить равносильность формул можно также путем их преобразования. Так заменяя импликацию равносильной ей формулой получим равносильность формул S_1 и S_2 упражнения 3.2:

$$S_1 = \overline{A} \vee (B \to C) = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$$

Рассмотрим некоторые упражнения на данную тему.

Упражнение 3.3

Указать множество наборов, удовлетворяющих уравнению

$$S=(xy \to yz) \vee x \vee y \vee z=0.$$

Решение получим построив истинностную таблицу данной формулы. Убеждаемся в том, что на всех 8$^{\underline{\text{ми}}}$ наборах истинности и ложности данных высказываний x, y, z формула принимает значение 1, т.е. наборов , где бы S принимала значение 0 нет, формула S≡1, т.е. тождественно истинна, т.е. наборов где бы S=0 нет.

К тому же результату можно прийти, преобразовав S и используя список основных равносильных формул:

$$S=(xy\to yz)\vee x\vee y\vee z=(\overline{xy}\vee yz)\vee x\vee y\vee z=\bar{x}\vee\bar{y}\vee yz\vee x\vee y\vee z\equiv 1$$

т.к. а) $\bar{x}\vee x\equiv 1$ (или $\bar{y}\vee y\equiv 1$)

б) $1\vee A\equiv 1$, где $A=\bar{y}\vee yz\vee y\vee z$

Упражнение 3.4

Проверить равносильность двух формул $\alpha=(x\to\bar{y})\to(\bar{z}\to x)$ и $\beta=(y\to\bar{x})\to(\bar{x}\to z)$.

Преобразуем формулы, заменив импликацию равносильной формулой.

$$\alpha=(x\to\bar{y})\to(\bar{z}\to x)=(\bar{x}\vee\bar{y})\to(\bar{\bar{z}}\vee x)=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}\vee z\vee x=\bar{x}\bar{y}\vee z\vee x=xy\vee x\vee z$$

$$\beta=(y\to\bar{x})\to(\bar{x}\to z)=(\bar{y}\vee\bar{x})\to(\bar{\bar{x}}\vee z)=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}\vee x\vee z=xy\vee x\vee z$$

Очевидно, $\alpha=\beta$.

Упражнение 3.5

При составлении расписания на понедельник преподаватели просили, чтобы уроки проходили в следующем порядке:

1) математика первым или третьим уроком;

2) история - первым или вторым;

3) литература - вторым или третьим.

Можно ли удовлетворить просьбы всех трех преподавателей и каким образом, если это возможно?

Введем следующие элементарные высказывания:

A - математика - $I^{\underline{ый}}$ урок

B - математика - $III^{\underline{ий}}$ урок

C - история - $II^{\underline{ой}}$ урок

D - история - $I^{\underline{ый}}$ урок

E - литература - $II^{\underline{ой}}$ урок

F - литература - $III^{\underline{ий}}$ урок

Просьбы всех преподавателей выражены высказываниями $S_1=A\vee B$, $S_2=C\vee D$, $S_3=E\vee D$.

Высказывание, удовлетворяющее просьбы всех трех преподавателей, очевидно, есть конъюнкция S_1, S_2, S_3, т.е. $S=S_1\wedge S_2\wedge S_3$ и оно должно быть истинным, т.е. S=1. Применим дистрибутивный закон №7 в преобразованиях S:

$$S=(A\vee B)(C\vee D)(E\vee F)=(AC\vee BC\vee AD\vee BD)(E\vee F)$$

В данном случае конъюнкция AD=0, т.к. первым уроком математика и история одновременно быть не могут.

$$S=ACE\vee BCE\vee BDE\vee ACF\vee BCF\vee BDF$$

Очевидно ACE=0, т.к. CE=0: второй урок не может быть одновременно уроком истории и литературы. Аналогично: BCE=0, BCF=0, BDF=0, т.е. $S= BDE\vee ACF=1$.

Дизъюнкция истинна, если одно из слагаемых истинно: BDE=1; ACF=1.

Конъюнкция высказываний истинна, если истинны все входящие в нее сомножители. В результате получаем два возможных варианта ответа:

1) BDE=1, т.е. история - I$^{\underline{\text{ый}}}$ урок,
литература - II$^{\underline{\text{ой}}}$ урок,
математика - III$^{\underline{\text{ий}}}$ урок.

2) ACF=1, т.е. математика - I$^{\underline{\text{ый}}}$ урок
история - II$^{\underline{\text{ой}}}$ урок,
литература - III$^{\underline{\text{ий}}}$ урок.

3.4.Варианты импликации

В математике весьма важными являются понятия: "необходимое условие", "достаточное условие", которые могут быть записаны с помощью связи импликации.

"А достаточное условие для В", очевидно выражается формулой: $A\to B$, а "А необходимое условие для В" - формулой $B\to A$, которую называют конверсией импликации. В конверсии импликации посылка А и заключение В меняются местами.

Достаточное условие может быть выражено формулой, равносильной формуле $A\to B$, а именно $\overline{B}\to\overline{A}$, называемой контроппозицией, а необходимое условие - формулой $\overline{A}\to\overline{B}=B\to A$, называемой конверсией контроппозиции. В рассуждениях эти равносильные формулы заменяют друг друга. Кроме того, "А достаточно для В" может быть выражено в виде "А только, если В", (не путать с "А если и только если В"), т.к. это означает: "Если не В, то не А", т.е.

$$\overline{B}\to\overline{A} \quad =A\to B$$

Итак, получим:

"А достаточно для В": $A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$, "А только, если В";

"А необходимо для В": $B \to A = \overline{A} \to \overline{B}$.

Очевидно, необходимое и достаточное условие выражается двойной импликацией $A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B})$

Упражнение 3.6

Написать формулы следующих высказываний.

S_1: дифференцируемая функция непрерывна;

S_2: функция дифференцируема только в случае ее непрерывности;

S_3: функция непрерывна только в случае ее дифференцируемости;

S_4: дифференцируемость функции есть необходимое условие ее непрерывности;

S_5: дифференцируемость функции есть достаточное условие ее непрерывности;

S_6: дифференцируемость функции есть необходимое и достаточное условие ее непрерывности.

Введем в качестве элементарных имен высказывания: А - данная функция дифференцируема, В - данная функция непрерывна.

Очевидно: $S_1 = A \to B$; S_2: "А только, если В", т.е. "Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$", т.е. $\overline{B} \to \overline{A} = A \to B$; S_3: "В только, если А", т.е. $\overline{A} \to \overline{B} = B \to A$; $S_4 = B \to A$; $S_5 = A \to B$; $S_6 = A \leftrightarrow B$.

Итак, высказывания S_1, S_2, S_5 выражают достаточность А для В, а высказывания S_3, S_4 - необходимость.

3.5.Функции алгебры высказываний

Основным понятием математической логики является понятие логической функции. Пусть областью определения аргумента является множество, состоящее из двух элементов, условно обозначаемых 1, 0. Если множество значений функции также состоит из двух элементов 1, 0, то такая функция называется логической функцией. В частности, элементом логической функции могут быть переменные высказывания, тогда сама функция также представляет собой некоторое высказывание, значение которого зависит от аргументов.

Пусть логическая функция зависит от n аргументов. Различных наборов значений истинности и ложности аргументов существует 2^n (строки истинностной таблицы). Зададимся вопросом, сколько существует различных логических функций, зависящих от n аргументов, т.е.

сколько существует различных столбцов в истинностной таблице, содержащей 2^n строк. Так как каждой из 2^n строк может быть поставлено в соответствие одно из двух значений 1 или 0, то всего столбцов существует 2^{2n}. Итак, число логических функций, зависящих от n аргументов $N=2^{2n}$, - конечное число. Различных формул алгебры высказываний, включающих в себя n переменных, существует бесчисленное множество. Оно разбивается на конечное число классов равносильных между собой формул.

Сформируем определение логической функции. Пусть M - множество функций $f(x_1, \dots x_n)$, переменные которых x_i $(i=\overline{1,n})$ определены на множестве E_2 (1,0), для которых $f(\alpha_1, \dots \alpha_n) \in E_2$, если $\alpha_i \in E_2$. Функции из множества M есть функции алгебры логики, или Булевы функции.

Среди переменных логической функции есть существенные переменные и фиктивные. Функция $f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если найдутся два набора

$$\sigma=(\sigma_1, \dots \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots \sigma_n) \text{ и}$$

$$\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \dots \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots \sigma_n)$$

такие, что $f(\sigma) \neq f(\tilde{\sigma})$. В этом случае переменная x_i является существенной переменной и фиктивной в противном случае.

Если переменная x_i - фиктивная, то функцию $f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n)$ можно свести к равной ей функции $g(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$ от $(n-1)^{\text{ой}}$ переменной. Для этого нужно в таблице функции f вычеркнуть все строки, где $x_i=1$ (или $x_i=0$) и столбец, соответствующий переменной x_i.

Упражнение 3.7

Функция $f(x_1\ x_2)$ задана таблицей 3.8. Содержит ли $f(x_1\ x_2)$ фиктивные переменные? Если да, требуется свести функцию "f" к равной ей функции "g" от одной переменной.

x_1	x_2	f
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица 3.8

Проверим переменную x_1. Для этого сравниваем наборы переменных x_1, x_2, где x_1 принимает различные значения, а значения x_2 не меняются. Первая пара наборов - первая и третья строки данной таблицы, т.е. $\sigma_1=(1,1)$ $\tilde{\sigma}_1=(0,1)$ приводят к результату $f(1,1)=0$, $f(0,1)=1$, т.е. нашли пару наборов, где при перемене значений исследуемой переменной x_1 и сохранении остальных переменных (в данном случае одна переменная x_2) значение функции f меняется; $f(\sigma_1) \neq f(\tilde{\sigma}_1)$, т.е. x_1 - существенная переменная.

При исследовании x_2 поступаем аналогично:

1) $\sigma_1=(1,1)$ $\tilde{\sigma}_1=(1,0)$ $f(\sigma_1)=f(\tilde{\sigma}_1)$

2) $\sigma_2=(0,1)$ $\tilde{\sigma}_2=(0,0)$ $f(\sigma_2)=f(\tilde{\sigma}_2)$
т.е. x_2 - фиктивная переменная.

x_1	g
1	1
0	0

Вычеркиваем в табл. 3.8 первую и третью строки: (1,1) (0,1), где x_1=1 (или вторую и четвертую: (1,0) (0,0), где x_1=0) и столбец, соответствующий фиктивной переменной x_2, получим $g(x_1)= f(x_1\ x_2)$.

Упражнение 3.8

Построить логическую функцию по формуле

$$S = (x_2 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})x_1\overline{x_2}$$

Какие из переменных являются существенными?

Построив истинностную таблицу формулы S, получим функцию, соответствующую данной формуле (табл. 3.9).

Таблица 3.9

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$	$x_2 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$	$\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	f
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

При различных значениях истинности и ложности переменной x_3 и фиксированных значениях переменных x_1 и x_2 значения функции одинаковы. Следовательно, x_3 - фиктивная переменная. Существенными являются переменные x_1 и x_2. Сравнивая вторую и четвертые строки табл. 3.9, обнаруживаем, что при одинаковых значениях истинности переменных x_1=1 x_3=0 и разных значениях x_2 (1,0). Значения функции разные, т.е. f(1,1,0)=f(1,0,0), следовательно, x_2 - существенная переменная. Сравнивая четвертую и восьмую строки таблицы получим f(1,0,0)≠f(0,0,0), т.е. x_1 - существенная переменная.

В том , что x_3 - фиктивная переменная можно убедиться преобразованием формулы S.

$$S = (x_2 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})x_1\overline{x_2} = (\underset{\sim}{\overline{x_2}} \vee x_1 \vee \underset{\sim}{x_2} \vee \overline{x_3})x_1\overline{x_2} =$$
$$= 1 \cdot x_1\overline{x_2} = x_1\overline{x_2}$$

x_1	x_2	g
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Таблица 3.10

Этой формуле соответствует функция g, получаемая из f удалением фиктивной переменной x_3 (табл. 3.10).

Выпишем все функции от двух переменных. Очевидно их будет $2^{2^2}=16$ (табл. 3.11).

Таблица 3.11

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Очевидно, введенные ранее связки $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ есть соответственно функции f_8, f_{14}, f_{11}, f_9. В качестве связок используются и другие функции, в частности

F_7 - штрих Шеффера $x_1 \mid x_2$,

F_1 - знак Лукашевича $x_1 \downarrow x_2$,

F_6 - разделительная дизъюнкция $x_1 \underline{\vee} x_2$, соответствующая разделительному союзу "или".

3.6. Полные системы связок

Система связок логики высказываний называется полной. если всякая формула логики высказываний равносильна некоторой формуле, содержащей лишь связки этой системы.

Используя формулы, равносильные импликации и двойной импликации, получим, что дизъюнкция, конъюнкция, отрицание образуют полную систему связок. Используя закон де Моргана, приходим к тому, что ($\vee$-), ($\wedge$-) - полные системы связок.

В самом деле из трех связок $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$ можно исключить дизъюнкцию: $A \vee B = \overline{A} \wedge \overline{B}$ или конъюнкцию: $A \wedge B = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Более того, любую формулу алгебры высказываний можно записать одной связкой - штрихом Шеффера, что и предлагается сделать читателю.

Набор таких связок как отрицание и двойная импликация - неполон, также как и $\{\vee, \rightarrow\}\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Упражнение 3.9

Проиллюстрировать полноту связок ($\vee$, $\overline{\ }$) на примерах:

$$S_1 = x\bar{y} \vee (y \rightarrow x) \quad S_2 = x \leftrightarrow y \vee z$$

Очевидно, в данных формулах нужно заменить все связки, кроме ($\vee$, $\overline{\ }$).

а) Преобразуем S_1:

$$S_1 = x\bar{y} \vee (y \rightarrow x) = x\bar{y} \vee \bar{y} \vee x$$

Применяя формулу поглощения получим

$$x\bar{y} \vee x = x, \text{ т.е. } S_1 = x \vee \bar{y}.$$

б) $S_2 = x \leftrightarrow y \vee z = x(y \vee z) \vee \bar{x}\overline{(y \vee z)}$, где $x(y \vee z) = \overline{\bar{x} \vee \overline{y \vee z}}$ по закону де Моргана, так же как и

$$\bar{x}\overline{(y \vee z)} = \overline{x \vee y \vee z}, \text{ т.е.}$$

Формула S_2 стала более громоздкой, но представлена только двумя связками: $\vee$, $\overline{\ }$.

Тренировочные задания к разделу 3	Решение

1. Пусть x, y, z - следующие элементарные высказывания: x - "a" - четное число, y - "b"- четное число, z - произведение "ab" - четное число.

Написать формулы и построить функции данных формул для следующих высказываний:

S_1: если "a" - четное число, а "b" нечетное то произведение "a" и "b" делится на "2";

S_2: произведение чисел "a" и "b" делится на "2" в том и только в том случае, если "a" и "b" четно;

S_3: если каждое из чисел "a" и "b" нечетно, то их произведение не делится на "2";

S_4: произведение чисел "a" и "b" не делится на "2" в том и только в том случае, если "a" и "b" нечетны.

Какие из формул S1, S2, S3, S4 равносильны?

Решение

$S_1 = \overline{xy} \to z$

$S_2 = z \leftrightarrow x \vee y$

$S_3 = \overline{xy} \to \overline{z}$

$S_4 = \overline{z} \leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y}$

					f_1		f_2			f_3	f_4
x	y	z	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	S_1	$x \vee y$	S_2	$\overline{xy}$	$\overline{z}$	S_3	S_4
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1

Функция формул S_1, S_2, S_3, S_4 представлены столбцами истинности таблицы этих формул, откуда следует, что S_2 и S_4 равносильны.

---

2. Указать множество наборов, удовлетворяющих уравнению $(xy \to \overline{z})(xz \to \overline{y})(yz \to \overline{x}) = 0$.

Решение

Преобразуем левую часть уравнения.

$$(xy \to \overline{z})(xz \to \overline{y})(yz \to \overline{x}) = (\overline{xy} \vee \overline{z})(\overline{xz} \vee \overline{y})(\overline{yz} \vee \overline{x}) =$$

$$= (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y})(\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{x}) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

Получим $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) = 0$. Дизъюнкция ложна, если все элементарные высказывания ее составляющие, принимают значение ложно, то есть, если x=y=z=1 .

К тому же результату можно прийти, построив истинную таблицу исходной формулы.

Тренировочные задания к разделу 3	Решение

Тренировочные задания к разделу 3

3. Какие из функций содержат фиктивные переменные? Свести функции, содержащие фиктивные переменные к функциям с меньшим числом переменных.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

Решение

Сравним наборы $\sigma = (1,0,1)$ и $\widetilde{\sigma} =(0,1,1)$.

1. Для функции f_1: x_1 принимает различные значения 1 и 0, в то время как значения x_2 и x_3 одинаковы ($x_2 =0$, $x_3 =1$).

$$f_1(1,0,1) \neq f_1(0,0,1)$$

Следовательно, x_1 - существенная переменная. Аналогично: x_2 и x_3 также существенны, так как

$$f_1(1,0,1) \neq f_1(0,0,1) \text{ и } f_1(1,1,1) \neq f_1(1,0,1)$$

2. Для функции f_2: переменная x_1- фиктивна, так как нет ни одной пары наборов $\sigma = (1,\sigma_2,\sigma_3)$ и $\widetilde{\sigma} = (0,\sigma_2,\sigma_3)$ таких, чтобы $f_2(\sigma) \neq f_2(\widetilde{\sigma})$.

X_2 - существенная переменная, так как $f_2(1,1) \neq f_2(1,0)$.
X_3 - также существенная переменная, так как $f_2(1,1,1) \neq f_2(1,0,0)$.
Чтобы свести функцию как $f_2(x_1,x_2, x_3)$ к равной ей функции $g(x_2,x_3)$ вычеркнем строки, где $x_1=1$ и столбец, соответствующий фиктивной переменной x_1; получим:

X_1	X_2	X_3
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Тест

1. Следующее высказывание может быть интерпретировано как сложное высказывание: "Неверно, что первым пришел Петр или Павел". Каковы составляющие его элементарные высказывания?

а) А: "Неверно, что первым пришел Петр"
В: "Неверно, что первым пришел Павел";
б) А: "Первым пришел Петр"
В: "Неверно, что первым пришел Павел";
в) А: "Первым пришел Петр"
В: "Первым пришел Павел".

2. Какой из формул может быть записано высказывание предыдущего вопроса?

а) $\overline{A} \vee \overline{B}$;
б) $\overline{A \vee B}$;
в) $\overline{A \wedge B}$.

3. Будет ли высказывание $S=(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)$:

а) тождественно истинным;
б) тождественно ложным;
в) переменным.

4. Каково значение X, определяемое уравнением $\overline{X \vee A} \vee \overline{X \vee \overline{A}} = B$?

а) $X = \overline{B}$;
б) B;
в) B \ A.

5. Чему равносильна конъюнкция контроппозиции и ее конверсии?

а) импликации;
б) конверсии импликации;
в) двойной импликации.

6. В высказывании S: "Треугольники равны только тогда, когда равны их стороны". Равенство углов в треугольнике является:

а) необходимым условием;
б) достаточным условием;
в) необходимым и достаточным условием.

7. Каждая из функций f_1, f_2, f_3 соответствует формуле (см. табл.). $S = x_1 \to x_2 \wedge x_3$?

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

Таблица 3.12

а) f_1;
б) f_2;
в) f_3.

8. Какая из переменных x_1, x_2, x_3 является фиктивной в формуле f, где f задана условием f (0,0,1)=f(0,0,0)? На остальных наборах значений переменных f принимает значение истинно.

а) x_1;
б) x_2;
в) x_3.

9. Какие из переменных x_1, x_2 в функции f_{15} (табл. 3.11) являются фиктивными?

а) x_1 - существенная переменная;
б) x_1 - существенная переменная;
в) обе переменные x_1 и x_2 - фиктивные.

10. Какие из пар связок образуют полную систему связок?

а) $(\vee, \overline{\ })$;
б) $(\vee, \to)$;
в) $(\wedge, \to)$.

Раздел 4. Проверка правильности рассуждений. Нормальные формы формул алгебры высказываний

4.1. Логические отношения

Рассмотрим взаимоотношения двух высказываний P и Q:

1. ***Отношение следствия.*** Говорят, что из P следует Q, а если Q истинно всякий раз, когда истинно P; Q называют следствием P.

Пусть P и Q - сложные высказывания, составленные из элементарных высказываний A, B следующим образом $Q=A\rightarrow B$, $P=A\leftrightarrow B$.

Таблица 4.1

A	B	$A\rightarrow B=Q$	$A\leftrightarrow B=P$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

В этом примере из Q не следует P, так как в третьей строке таблицы 4.1 Q принимает значение 1, в то время как P=0. Но из P следует Q, так как Q принимает значение 1 в первой и четвертой строках таблицы, т. е. тогда, когда истинно P.

Между отношением следствия и импликацией существует тесная связь. Но следует помнить, что это не одно и то же. Импликация - сложное высказывание, составленное из двух данных, а следствие - отношение между двумя высказываниями.

Таблица 4.2

P	Q	$P\rightarrow Q$
1	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~
0	1	1
0	0	1

Когда импликация выражает отношение следствия? Q есть следствие P лишь при условии, что логическая возможность, соответствующая второй строке истинностной таблице 4.2 импликации, не должна иметь место. А в этом случае истинностная таблица импликации содержит одни единицы. Заметим, что высказывания, связанные импликацией, при отсутствии смысловой связи могут звучать парадоксально. В самом деле, высказывание “Если я не приду на лекцию, то река впадает в Белое море” звучит парадоксально. Между посылкой и заключением в этих случаях не существует отношения следствия.

Упражнение 4.1

Между какими парами высказывании, приведенных ниже, существует отношение следствия?

S_1: Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, то она - касательная к окружности.

S_2: Прямая есть касательная к окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к радиусу окружности и проходит через точку пересечения радиуса с окружностью.

S_3: Если прямая перпендикулярна к радиусу окружности, но не проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, то она не является касательной к окружности.

S_4: Если прямая проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, но не является касательной, то прямая не перпендикулярна к радиусу окружности.

Введем элементарные высказывания:

A: Прямая перпендикулярна к радиусу окружности.

B: Прямая проходит через точку пересечения радиуса с окружностью.

C: Прямая - касательная к окружности.

Запишем формулы приведенных высказываний.

$S_1=AB\to C$

$S_2=C\leftrightarrow AB$

$S_3=A\overline{B}\to\overline{C}$

$S_4=B\overline{C}\to\overline{A}$

Построим истинностные таблицы этих высказываний, получим:

Таблица 4.3

A	B	C	S_1	S_2	S_3	S_4	$S_2\to S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Из высказывания S_2 следует S_1 и S_4, т. к. при истинностных значениях "1" в первой, четвертой, шестой и восьмой строках высказывания S_2 те же значения "1" имеем в указанных строках высказываний S_1 и S_4 и импликации $S_2 \to S_1$, $S_2 \to S_4$ становятся тождественно истинными высказываниями $S_2 \to S_1 \equiv 1$, $S_2 \to S_4 \equiv 1$.

Особое место занимает пара высказываний S_1 и S_4. Каждая из них следует из другого: из S_1 следует S_4 и из S_4 следует S_1. В этом случае говорят, что высказывания S_1 и S_4 эквивалентны.

2. ***Отношение эквивалентности.***

Если истинностная таблица двойной импликации $P \to Q$ (табл. 4.4.) содержит только "1", т. е. исключаются логические возможности, соответствующие второй и третьей строкам, значения истинности P и Q одинаковы. В этом случае говорят, что P и Q эквивалентны.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица 4.4

Таким образом, эквивалентные высказывания задаются равносильными формулами. В упражнение 4.7 высказывания S_1 и S_4 эквивалентны.

3. ***Несовместимость.***

Два высказывания называются несовместимыми, если не существует логической возможности, при которой оба высказывания были бы одновременно истинными, т. е. при истинном значении одного из них другое обязательно ложно.

Это понятие распространяется на любое число высказываний.

Чтобы установить совместимость высказываний, нужно построить их истинностные таблицы. Если найдется хотя бы одна строка, в которой все высказывания принимают значения "истинно", данные высказывания будут совместимы, в противном случае - нет.

Все высказывания упражнения 4.1 совместимы. Примером несовместимых высказываний является пара: некоторое высказывание P и его отрицание.

4.2. Проверка правильности рассуждений

Рассуждение есть утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок). Рассуждение считается правильным только в том случае, если из конъюнкции посылок следует заключение, т. е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия. Если P_1, P_2, ... , P_n - посылки, а Q - заключение, то рассуждение правильно, если между высказыванием $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ и Q установлено отношение следствия. В этом случае импликация $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \to Q$ должна быть тождественно истинным высказыванием (тавтологией).

Правильность рассуждения можно установить, построив истинностную таблицу высказывания $S= P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \to Q$ и убедившись в том, что оно тождественно истинно.

При большом числе посылок установить тот факт, что является тавтологией, удобнее с помощью преобразований высказывания к равносильной ему формуле, являющейся тавтологией.

Метод "от противного" заключается в предположении, что заключение ложно, и установление того факта, что при этом конъюнкция $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ - ложна (что имеет место в том случае, если хотя бы одна из посылок P_i $(i=\overline{1,n})$ принимает значение "ложно"). Если это выполняется, то рассуждение верно, в противном случае - нет. Таким образом, в случае правильного рассуждения мы убеждаемся в том, что импликация $S= P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \to Q \equiv 1$, т. к. отсутствует логическая возможность, соответствующая $P= P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n=1$, $Q=0$, где импликация $P \to Q$ принимает значение ложно.

Упражнение 4.2

"Если функция непрерывна на данном интервале и имеет разные знаки на его концах, то внутри интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала. но на концах интервала имеет разные знаки. Следовательно, функция разрывна".

Посылки и заключения в данном рассуждении состоят их следующих элементарных высказываний:

A - "функция непрерывна на данном интервале",
B - "функция имеет разные знаки на концах интервала"
C - "функция обращается в нуль внутри данного интервала".

Используя эти обозначения, запишем посылки и заключение в виде формул:

$A \wedge B \to C$	(1-я посылка P_1)
$\overline{C} \wedge B$	(2-я посылка P_2)
$\overline{A}$	(заключение Q)

Если импликация $(A \wedge B \to C) \wedge (\overline{C} \wedge B) \to \overline{A} = P \to Q$ тождественно истинна, то рассуждение верно. Для проверки правильности рассуждения строим истинностную таблицу:

A	B	C	AB	$AB\to C$	$\overline{C}$	$\overline{C}B$	$P_1\wedge P_2$	$\overline{A}$	$P_1\wedge P_2\to Q$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Убеждаемся, что рассуждение верно. Проведем проверку правильности этого рассуждения методом от противного. Предположим, что заключение Q ложно. Покажем, что в этом случае конъюнкция посылок $P_1\wedge P_2$ ложна, т. е. $P \to Q$ тождественно истинна.

В самом деле, если $Q=\overline{A}$ ложно, то A истинно. Пусть $P_2=\overline{C}B$ истина, тогда B - истинно, $\overline{C}$ - истинно т. е. C - ложно, но в этом случае посылка принимает значение ложно, так как $P_1=AB\to C$ принимает значение ложно, так как AB=1, а C=0, что и требовалось проверить.

Правильность данного рассуждения можно проверить, преобразовав формулу $P_1\wedge P_2$ к некоторой равносильной ей формуле, которая задает заведомо тождественно истинное высказывание.

Это сделаем после ознакомления с так называемыми совершенными нормальными формами формул алгебры высказываний.

4.3. Нормальные формы формул алгебры высказываний

Если в какой - либо логической ситуации данная формула принимает значение “истинно”, она называется выполнимой. К классу выполнимых формул относятся такие формулы, множество истинности которых не пусто. В противном случае формула называется невыполнимой.

Установить тот факт, что данная формула является выполнимой, можно с помощью истинностных таблиц. Нужно построить истинностную таблицу данной формулы и убедиться в том, что она содержит не одни нули. В противном случае формула является невыполнимой, тождественно ложной.

При большом числе переменных истинностные таблицы громоздки. Установить тип формулы (невыполнима - тождественно ложна, выполнима – тавтология или переменное высказывание, принимающее в одних ситуациях значение “истинно”, в других - “ложно”) удобнее с помощью так называемых нормальных форм.

Определение 1. Элементарным произведением (или основной конъюнкцией) называется конъюнкция элементарных высказываний или их отрицаний.

Определение 2. Элементарной суммой (или основной дизъюнкцией) называется дизъюнкция элементарных высказываний или их отрицаний.

Элементарная конъюнкция “k” и элементарная дизъюнкция “d” над множеством переменных $x^n = \{x_{i_1}, \dots x_{i_r}\}$ могут быть записаны формулами:

$$k = x_{i_1}^{\delta_1} \wedge x_{i_2}^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\delta_r}$$

$$d = x_{i_1}^{\delta_1} \wedge x_{i_2}^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\delta_r},$$

где $i_k \in \{1,2, \dots n\}$ для всех $k = \overline{1,r}$

$\delta_k \in \{0,1\}$, причем $x_{i_k}^{0} = \overline{x}_{i_k}$ и $x_{i_k}^{1} = x_{i_k}$

Пусть сложное высказывание состоит из $4^{\underline{x}}$ элементарных, обозначенных соответственно A, B, C, D. Элементарные дизъюнкции и элементарные конъюнкции могут быть составлены соответственно и $k = \overline{1,4}$ элементарных высказываний.

Так имеем $K_1 = A\overline{B}D$, $K_2 = \overline{A}BC\overline{D}$, $K_3 = \overline{A}\ \overline{B}$ - некоторые из элементарных конъюнкций, соответственно $d_1 = \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$, $d_2 = A \vee \overline{B} \vee C$ - некоторые из элементарных дизъюнкций. В дальнейшем будем пользоваться большими латинскими буквами для обозначения переменных.

Теорема 1. Элементарное произведение является тождественно ложным тогда и только тогда, когда оно содержит пару сомножителей, один из которых является элементарным высказыванием, а другой - его отрицанием.

Теорема 2. Элементарная сумма является тождественно истинной тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно является элементарным высказыванием, а другое - его отрицанием.

Так, элементарная сумма $A \vee B \vee C \vee \overline{B}$ тождественно истинна, элементарное произведение $ABC\overline{B}$ тождественно ложно.

Определение 3. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией элементарных произведений, называется дизъюнктивной нормальной формой данной формулы и обозначается ДНФ.

Пример: $ABC \vee B\overline{C} \vee \overline{A}$.

<u>Определение 4.</u> Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией элементарных произведений, называется конъюнктивной нормальной формой данной формулы и обозначается КНФ.

Пример: $(B \vee \overline{C} \vee \overline{A})(A \vee B)B$.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Для этого нужно:

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными - конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$,
$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B}) = AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$.

2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям типа $\overline{A \wedge B}$ или $\overline{A \vee B}$, знаками отрицания, относящимся к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,
$\overline{A \vee B} = A \wedge B$.

3. Избавиться от знаков двойного отрицания на основании равенства $\overline{\overline{A}} = A$.

4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности.

Упражнение 4.3

Пусть $S = (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{B})$. Построим КНФ для этой формулы.

1) избавимся от знаков импликации, получим:

$(\overline{A} \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B})$;

2) избавимся от знака двойной импликации:

$((\overline{\overline{A} \vee B}) \vee (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}))((\overline{A} \vee B)(\overline{\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}}))$;

3) избавимся от знака отрицания, относящегося к выражениям, состоящим более чем из одной переменной:

$((\overline{\overline{A}}\overline{B}) \vee (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}))((\overline{A} \vee B)(\overline{\overline{\overline{A}}}\overline{\overline{B}}))$;

4) избавимся от двойных и тройных отрицаний:

$((A\overline{B}) \vee (A \vee \overline{B}))(\overline{A} \vee B) \vee (\overline{A}B))$;

5) применим законы дистрибутивности:

$A\overline{B} \vee (A \vee \overline{B}) = (A \vee \overline{B} \vee A)(A \vee \overline{B} \vee \overline{B})$,

$(\overline{A} \vee B) \vee \overline{A}B = (\overline{A} \vee B \vee \overline{A})(\overline{A} \vee B \vee B)$.

Получим S=$(A \vee \overline{B} \vee A)(A \vee \overline{B} \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B \vee \overline{A})(\overline{A} \vee B \vee B)$. Это КНФ для данной формулы S.

Используя свойства A∨A=A и AA=A, упростим КНФ для S:

S=$(A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B)$.

Теорема 3. Формула алгебры высказываний является тождественно истинной тогда и только тогда, когда каждый множитель ее КНФ содержит пару слагаемых, одно из которых является элементарным высказыванием, а другое - его отрицанием.

Теорема 4. Формула алгебры высказываний является тождественно ложной тогда и только тогда, когда каждое слагаемое (т. е. каждое элементарное произведение) ее ДНФ содержит пару сомножителей, один из которых есть элементарное высказывание, другой - его отрицание.

Теоремы 3,4 позволяют решить вопрос о выполнимости любой формулы алгебры высказываний.

Нужно построить для этой формулы ее ДНФ или ее КНФ. Если построена ДНФ и оказывается, что она удовлетворяет условиям теоремы 4, то формула является невыполнимой. Можно построить КНФ для отрицания исходной формулы. Если окажется, что она удовлетворяет условиям теоремы 3, то исходная формула невыполнима, т. к. ее отрицание тождественно истинно. В остальных случаях формулы являются выполнимыми.

Упражнение 4.4

Установить тип формулы S=$(A \vee B) \to (B \to C)$.

Определим КНФ для отрицания S:

$$S = (A \vee B) \to (B \to C) = (A \vee B) \vee (\overline{B} \vee C) = \overline{A}\overline{B} \vee (\overline{B} \vee C) =$$

$$= (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(\overline{B} \vee \overline{B} \vee C) = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(\overline{B} \vee C).$$

КНФ для $\overline{S}$ не удовлетворяет условию теоремы 3, следовательно, S – выполнима, то есть $S \not\equiv 0$, так как $\overline{S} \not\equiv 1$.

Обратимся к вопросу о правильности рассуждений. Чтобы убедиться в том, что рассуждение верно, нужно либо преобразовать импликацию $S= P_1\wedge P_2\wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ к КНФ и удостовериться в том, что она удовлетворяет условиям теоремы 3, либо $\overline{S}$ преобразовать к ДНФ и убедиться в том, что она удовлетворяет условиям теоремы 4.

В упражнении 4.2. $S = (A \wedge B \to C) \wedge (\overline{C} \wedge B) \to \overline{A}$. Преобразуем S к виду КНФ.

$$S = (\overline{AB} \vee C)\overline{C}B \to A = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)\overline{C}B \vee \overline{A} =$$

$$= (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \vee \overline{\overline{C}} \vee \overline{B} \vee \overline{A} = AB\overline{C} \vee C \vee \overline{B} \vee \overline{A} =$$

$$= (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee A)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee B)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{C})$$

Конъюнктивная нормальная форма удовлетворяет условиям теоремы 3, каждый сомножитель есть тождественно истинное высказывание, а также и их произведение, что и требовалось получить.

4.4. Совершенные нормальные формы

Определение 5. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (СДНФ) называется ее ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1. Она не содержит двух одинаковых слагаемых.

2. Ни одно слагаемое не содержит одновременно двух одинаковых сомножителей.

3. Ни одно слагаемое не содержит одновременно некоторого высказывания и его отрицания.

4. Каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя либо переменное высказывание, либо его отрицание для всех переменных, входящих в формулу.

Это определение является конструктивным, т.е. позволяет для каждой формулы алгебры высказываний, приведенной к ДНФ, построить ее СДНФ.

Упражнение 4.5

$$S = AB \vee \overline{A}B\overline{B} \vee ACC \vee A\overline{B}C \vee AB .$$

Задана ДНФ. Приведем ее к СДНФ.

1. Первое и последние слагаемые одинаковы. На основании свойства операции дизъюнкции $A\vee A=A$ одно из одинаковых слагаемых можно отбросить.

2. ACC=AC.

3. $AB\overline{B} = 0$.

Получим $S = AB \vee AC \vee A\overline{B}C$.

Теперь выполнили условия 1 - 3. Чтобы выполнить условие 4, поступим следующим образом:

$$AB = AB \cdot 1 = AB(C \vee \overline{C}) = ABC \vee AB\overline{C};$$

$$AC = AC \cdot 1 = AC(B \vee \overline{B}) = ABC \vee A\overline{B}C.$$

Следовательно, $S = ABC \vee AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{B}C \vee A\overline{B}C$.

Теперь условие 4 выполнено, но появились одинаковые слагаемые. Исключив их получим:

$$S = ABC \vee AB\overline{C} \vee A\overline{B}C.$$

Определение 6. Совершенной конъюнктивной нормальной формой данной формулы алгебры высказываний (СКНФ) называется такая ее КНФ, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. Она не содержит двух одинаковых сомножителей.

2. Ни один из сомножителей не содержит одновременно двух одинаковых слагаемых.

3. Ни один из сомножителей не содержит одновременно некоторого высказывания и его отрицания.

4. Каждый сомножитель СКНФ содержит в качестве слагаемого либо переменное высказывание, либо его отрицание для всех переменных, входящих в формулу.

Определение СКНФ также является конструктивным.

Упражнение 4.6

Дана КНФ: $S = (A \vee B)(A \vee \overline{A} \vee B \vee C)(A \vee B \vee B)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$.

Построить СКНФ.

1. $A \vee B \vee B = A \vee B$.

2. $(A \vee B)(A \vee B) = A \vee B$.

3. $A \vee \overline{A} \vee B \vee C \equiv 1$, следовательно, $S = (A \vee B)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$.

4. $A \vee B = A \vee B \vee \varnothing = A \vee B \vee C\overline{C} = (A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \overline{C})$.

Следовательно, $S = (A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \overline{C})(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$,

Из определений и теорем 3, 4 следует, что тождественно истинная формула не имеет СКНФ, а тождественно ложная - СДНФ.

Каждая не тождественно истинная и не тождественно ложная формула имеет единственную СКНФ и СДНФ.

Совершенные нормальные формы могут быть применены для установления равносильности двух заданных формул алгебры высказываний. Для этого нужно обе формулы привести к СКНФ или СДНФ и убедить в их совпадении. Например, формулы

$$S_1 = A \to \overline{(B \to \overline{(\overline{B} \to C)})} \text{ и } S_2 = A \to B \text{ равносильны:}$$

$$S_1 = S_2 = (\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}).$$

Полной элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, удовлетворяющая свойствам 2, 3, 4 определения 5. Аналогично, полной элементарной суммой называется элементарная дизъюнкция, удовлетворяющая свойствам 2, 3,4 определения 6.

Поэтому совершенные нормальные формы можно определить так:

<u>Определение 7.</u> Совершенной дизъюнктивной нормальной формой некоторой формулы алгебры высказываний называется формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией различных полных элементарных конъюнкций.

<u>Определение 8.</u> Совершенной конъюнктивной нормальной формой некоторой формулы алгебры высказываний называется формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией различных полных элементарных дизъюнкций.

Каждая полная элементарная конъюнкция на одном наборе значений переменных высказываний, ее составляющих, обращается в 1: переменное высказывание, входящее без знака отрицания, принимает значение 1, а со знаком отрицания - 0. Этот набор значений элементарных составляющих называется единицей данной полной элементарной конъюнкции. Так единицей полной элементарной конъюнкции $A\overline{B}C$ является (1, 0,1).

Аналогично. Каждая полная элементарная дизъюнкция на одном наборе значений переменных высказываний, ее составляющих, обращается в 0: переменное высказывание, входящее без знака отрицания, принимает значение 0, а со знаком отрицания - 1. Этот набор значений элементарных составляющих называется нулем данной полной элементарной дизъюнкции. Так нулем полной элементарной дизъюнкции $\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$ является (1, 1,0).

Эти сведения непосредственно используются в следующем разделе данного учебного пособия.

Тренировочные задания к разделу 4	Решение
1. Заданы три высказывания: S_1: "Если задача сложна, но понятна, то она интересна". S_2: "Эта задача интересна, сложна, но непонятна". S_3: "Если задача сложна или непонятна, то она неинтересна". Совместимы ли данные высказывания? Есть ли среди них эквивалентные высказывания? Между какими парами высказываний существует отношение следствия?	Введем элементарные высказывания: А: «Эта задача сложна». В: «Эта задача понятна». С: «Эта задача интересна». Запишем формулы исследуемых высказываний: $S_1 = AB \rightarrow C$ $S_2 = CA\overline{B} = A\overline{B}C$ $S_3 = A \vee \overline{B} \rightarrow \overline{C}$ Построим истинностные таблицы.

A	B	C	S_1	S_2	S_3
1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1

Откуда следует, что

1) все три высказывания несовместимы;
2) эквивалентных высказываний нет;
3) из высказывания S_2 следует S_1.

Тренировочные задания к разделу 4	Решение
2. На предприятии три отдела A,B,C договорились о следующем: 1) "Если отдел А не участвует в утверждении проекта, то в нем не участвует и отдел В" 2) "Если отдел А участвует в утверждении проекта, то в нем участвуют В и С. Выяснить, обязан ли при этих условиях отдел С участвовать в утверждение проекта, когда в нем участвует отдел В.	Введем элементарные высказывания: x: «Отдел А участвует в утверждении проекта». y: «Отдел В участвует в утверждении проекта». z: «Отдел С участвует в утверждении проекта». Высказывания, соответствующие договоренности, запишем формулами: $P_1 = \overline{x} \to \overline{y}$ $P_2 = x \to yz$ Очевидно, эти условия являются посылками рассуждения, заключением которого является высказывание: $Q = y \to z$ Проверим, является ли рассуждение правильным методом от противного. Пусть $Q = y \to z = 0$. В этом случае $y = 1, z = 0$. Пусть $P_2 = 1$, то есть $x \to yz = 1$, где $yz = 0$ следовательно $x=0$. Проверим посылку P_1 при полученных значениях элементарных высказываний: $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = 0$, $P_1 = 0$. Следовательно, рассуждение правильно, заключение следует из посылок. Отдел С при этих условиях обязан участвовать в утверждении проекта.

Тренировочные задания к разделу 4	**Решение**
3. Найти обе совершенные нормальные формы для формулы $S = (A \to B) \leftrightarrow (A \vee BC)$.	1) Преобразуем S, освободившись от связок →,↔. $S = (A \to B) \leftrightarrow (A \vee BC) = (\bar{A} \vee B) \leftrightarrow (A \vee BC) =$ $= (\bar{A} \vee B)(A \vee BC) \vee \overline{(\bar{A} \vee B)}\,\overline{(A \vee BC)}$ Преобразуем второе слагаемое: $\overline{(\bar{A} \vee B)}\,\overline{(A \vee BC)} = \bar{\bar{A}}\overline{BABC} = A\overline{BABC} = 0$ Итак, $S = (\bar{A} \vee B)(A \vee BC)$ 2) Чтобы найти ДНФ применим дистрибутивный закон №7 раздела 3. $S = \bar{\bar{A}}A \vee AB \vee \bar{A}BC \vee BBC = AB \vee \bar{A}BC \vee BC$ Преобразуем ДНФ к совершенному виду: $AB = AB(C \vee \bar{C}) = ABC \vee AB\bar{C}$ $BC = BC(A \vee \bar{A}) = ABC \vee \bar{A}BC$ $S = ABC \vee AB\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee ABC \vee \bar{A}BC$ $S = ABC \vee AB\bar{C} \vee \bar{A}BC$

Тренировочные задания к разделу 4	Решение
	3) Чтобы найти СКНФ применим дистрибутивный закон №8 раздела 3 к полученной формуле. Приведем полученную КНФ к совершенному виду: $\overline{A} \vee B = (\overline{A} \vee B) \vee C\overline{C} = (\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee \overline{C})$ $A \vee B = (A \vee B)C\overline{C} = (A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \overline{C})$ $A \vee C = (A \vee C)B\overline{B} = (A \vee B \vee C)(A \vee \overline{B} \vee C)$ $S = (\overline{A} \vee B)(A \vee BC)$ $A \vee BC = (A \vee B)(A \vee C)$ $S = (\overline{A} \vee B)(A \vee B)(A \vee C)$ Следовательно, $S = (\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee \overline{C})(\underline{A \vee B \vee C})(A \vee B \vee \overline{C}) \equiv$ $\equiv \cancel{(A \vee B \vee C)}(A \vee \overline{B} \vee C)$ Итак, $S = (\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee \overline{C})(A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \overline{C})(A \vee \overline{B} \vee C)$

Тест

1. Даны два высказывания S_1: " Если треугольники равны, то равны их стороны", S_2: "Стороны треугольников равны тогда и только тогда, когда равны треугольники". Существует ли отношение следствия между S_1 и S_2?

а) из S_1 следует S_2;
б) из S_2 следует S_1;
в) ни одно из высказываний не следует из другого.

2. Если между высказываниями S_1 и S_2 существует отношение следствия, являются ли эти высказывания совместимыми?

а) да;
б) нет;
в) может быть и тот и другой вариант.

3. Если из высказывания S_1 следует S_2 и наоборот из S_2 следует S_1, являются ли высказывания S_1 и S_2 эквивалентными?

а) да;
б) нет;
в) может быть и тот и другой вариант.

4. Если высказывания эквивалентны, существует ли между ними отношения следствия?

а) да;
б) нет;
в) может быть и тот и другой вариант.

5. Могут ли быть при правильном рассуждении все посылки истинными, если заключение ложно?

а) да;
б) нет;
в) иногда да, иногда нет.

6. Существует ли СКНФ у тождественно истинной формулы алгебры высказываний?

а) да;
б) нет;
в) иногда да, иногда нет.

7. Существует ли СДНФ у невыполнимой формулы?

а) да;
б) нет;
в) иногда да, иногда нет.

8. Каково множество истинности у невыполнимой формулы?

а) "U" - универсальное;
б) "V" - пустое;
в) некоторое множество А, неявляющееся ни пустым, ни универсальным.

9. Сколько единиц имеет полная элементарная конъюнкция?

а) ни одной;
б) одну;
в) несколько.

10. Сколько нулей имеет полная элементарная дизъюнкция?

а) один;
б) ни одного;
в) несколько.

Раздел 5. Алгебра высказываний и релейно-контактные схемы. Исчисление высказываний

5.1. Построение формулы алгебры высказываний по заданной логической функции

Рассмотрим задачу, обратной той, о которой шла речь в разделах III, IV - построение функции для некоторой формулы алгебры высказываний. Задана некоторая функция $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, нужно построить для нее формулу S. Задача эта неоднозначна, существует множество равносильных между собой формул, соответствующих этой функции. Будем строить совершенную нормальную форму. При этом учтем, что полная элементарная дизъюнкция имеет единственный ноль, а полная элементарная конъюнкция - единственную единицу. Решение задачи рассмотрим на примере.

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Таблица 5.1

Пусть задана некоторая функция трех аргументов f(1,1,1)=f(1,0,0)=f(0,1,0)=1. Это значит, что на наборах (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0) функция принимает значение 1, а на остальных наборах - 0.

Построим S в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы. Так как S не тождественно ложна, это можно сделать. СДНФ состоит из стольких слагаемых, сколько единиц содержит функция. Первому значению 1 соответствует слагаемое xyz, принимающее значение 1 при x=1, y=1, z=1. Второму значению 1 соответствует слагаемое $x\bar{y}\bar{z}$, принимающее значение 1 при x=1, y=0, z=0. Аналогично третье слагаемое, соответствующее 1, стоящей в шестой строке таблицы f есть $\bar{x}y\bar{z}$. Следовательно, $S = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$. Итак:

1) Совершенная дизъюнктивная нормальная форма содержит столько слагаемых, сколько единиц имеет функция.

2) Эти единицы соответствуют тем наборам переменных, при которых каждое слагаемое (элементарная конъюнкция) обращается в единицу, т.е. переменным, входящим в элементарную конъюнкцию без знака отрицания, соответствует значение 1, а со знаком отрицания - 0.

Чтобы написать СКНФ по заданной функции, нужно выбрать все значения 0, встречающиеся в ней, и рассмотреть наборы значений переменных, отвечающие этим нулям. В заданном примере таблица содержит пять нулей. Первому значению 0 отвечает сомножитель $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$, обращающийся в 0 при x=1, y=1, z=0. Второму - $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$ при x=1, y=0, z=1 и т.д. В результате получим

$$S = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)$$

Итак:

1. СДНФ содержит столько сомножителей, сколько нулей имеет истинностная таблица.

2. Эти нули соответствуют тем наборам переменных, при которых каждый сомножитель (каждая элементарная сумма) обращается в 0, т.е. переменным, входящим в элементарную сумму без знака отрицания, соответствует значение 0, а со знаком отрицания - 1.

Заметим, что используя список основных равносильных формул, полученные выражения для S упрощают, если это возможно.

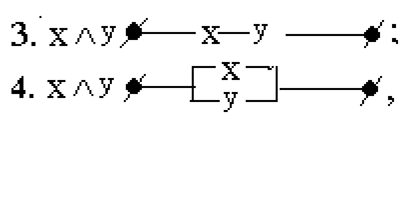
5.2. Моделирование алгебры высказываний с помощью релейно-контактных схем

Релейно-контактная схема представляет собой устройство из проводников и контактов, связывающих полюса источника тока. Контакты могут быть размыкающими и замыкающими. Каждый контакт подключен к некоторому реле. Когда реле находится под током, все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие - разомкнуты.

Каждому реле можно поставить в соответствие значение 1, если оно находится под током, и 0, если нет. Все замыкающие контакты, подключенные к реле x, будем обозначать x_1, ... x_n, а размыкающие - $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$.

Всей схеме также можно поставить одно из двух значений 1, если схема проводит ток, и 0, если не проводит. Это значение есть функция переменных x_i, $\overline{x}_i$, т.е. логическая функция. Эту функцию называют функцией проводимости электрической цепи.

Всякая формула алгебры высказываний может быть реализована некоторой релейно-контактной схемой, имеющей соответствующую функцию проводимости. И наоборот, для некоторой схемы можно указать ее функцию проводимости, логическую функцию, а затем построить для нее некоторую формулу алгебры высказываний. При этом основные логические связки моделируются следующими элементарными схемами:



т.е. дизъюнкция моделируется параллельным соединением проводников, конъюнкция - последовательным.

Упражнение 5.1

Построить функцию проводимости следующей схемы:

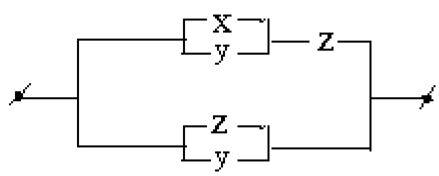


Рис. 5.1

Функция проводимости для такой схемы задается, очевидно, следующей таблицей:

Таблица 5.2

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

По данной логической функции построим формулу - СКНФ:

$$S = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)$$

Упростим это выражение: $S = (y \vee z) \vee (\bar{x} \wedge x) = y \vee z$.

Построим более простую схему, имеющую ту же функцию проводимости, что и исходная:

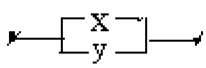


Рис. 5.2

Чтобы упростить релейно-контактную схему, не обязательно строить ее функцию проводимости. Можно написать соответствующую данной схеме формулу и упростить. Затем построить схему электрической цепи, моделирующую эту упрощенную формулу. Так, для электрической цепи, приведенной в данном примере,

$$S = (x \vee y)z \vee z \vee y = y \vee z .$$

Упражнение 5.2

Построить наиболее простую релейно-контактную схему по заданной функции проводимости f(x,y,z): f(0,1,0)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=0.

Строим СКНФ: $S = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)$, т.к. эти сомножители обращаются в "0" на указанных наборах функции: (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1).

Далее упрощаем формулу S:

$$S = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z) = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee \bar{y} \vee z) = \bar{y} \vee \bar{x}(x \vee z) = \bar{y} \vee \bar{x}z$$

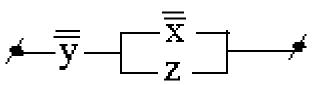


Рис. 5.3

5.3. Исчисление высказываний. Символы, формулы, аксиомы исчисления высказываний

Рассмотрим формальную аксиоматическую систему, в некотором смысле адекватную алгебре высказываний. Назовем эту систему исчислением высказываний.

Чтобы построить исчисление, нужно определить алфавит исчисления, понятие формулы, класс формул, называемых аксиомами, правила вывода данного исчисления.

Символы исчисления высказываний состоят из знаков трех категорий:

1. Большие латинские буквы A, B, C, ... X, Y, Z, ..., которые назовем переменными высказываниями.
2. Символы операций исчисления $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\overline{}$ (знак конъюнкции, дизъюнкции, следования и отрицания).
3. Скобки ( ).

Других символов система исчисления высказываний не содержит.

Формулой в исчислении высказываний является некоторая последовательность символов. Но не всякая последовательность символов есть формула. Например, последовательности $A \rightarrow B \vee (C \rightarrow)$ и $(A \wedge B)$ не являются формулами. Определение формулы в исчислении высказываний задается следующим образом:

1. Всякое переменное высказывание есть формула.

2. Если α, β есть формулы, то выражения вида $(\alpha \wedge \beta)$, $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta})$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ также являются формулами.

Зададим в исчислении высказываний класс исходных истинных формул-аксиом.

I. 1. $A\to(B\to A)$;
   2. $(A\to (B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)$;

II. 1. $A\wedge B\to A$;
   2. $A\wedge B\to B$;
   3. $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$;

III. 1. $A\to A\vee B$;
   2. $B\to A\vee B$;
   3. $(A\to C)\to((B\to C)(A\vee B\to C))$.

IV. 1. $(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A})$;
   2. $A\to\overline{\overline{A}}$;
   3. $\overline{\overline{A}}\to A$.

Правила вывода позволяют из данной системы аксиом получать другие истинные формулы исчисления высказываний. Назовем формулу исчисления высказываний ложной, если ее отрицание истинно. Будем обозначать истинные формулы буквой R, ложные - F.

К основным правилам вывода относятся два:

1) Правило заключения.

Если α и $(\alpha\to\beta)$ - истинные формулы, то β также истинна. Это предложение можно записать в виде

$$\frac{\alpha,\alpha\to\beta}{\beta}$$

2) Правило подстановки

Пусть некоторая формула α содержит переменное высказывание A. Тогда, заменив высказывание A всюду, где оно встречается, любой формулой β, получим истинную формулу. Это предложение записывается в виде

$$\frac{\alpha}{S_A^{\beta}(\alpha)}$$

Формула называется выводимой в исчислении высказываний, если ее можно получить, применяя правила вывода к аксиомам исчисления высказываний. Утверждение, что формула β выводима, записывают так:

$$\vdash \qquad \vdash\beta$$

Процесс получения формул из аксиом исчисления высказываний называется формальным выводом. Формальный вывод состоит из указания того, какие правила, в каком порядке и к каким формулам применяется для выведения данной формулы.

Упражнение 5.3

Докажем, что выводима формула $A\to A$, т.е. $A\to A$.

1. Запишем аксиому 2 из группы I.

$$(A\to (B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C);$$

2. Применим к ней правило подстановки S_C^A, т.е.

$$\underbrace{(A\to(B\to A))}_{\alpha}\to\underbrace{((A\to B)\to(A\to A)}_{\beta}$$

3. Заметим, что α есть истинная формула, как аксиома из группы I, т.е. имеем истинные формулы α и $\alpha\to\beta$. Применим правило заключения $\dfrac{\alpha,\alpha\to\beta}{\beta}$ и получим $(A\to B)\to(A\to A)$.
4. Применим правило подстановки к полученной формуле, заменив высказывание B на $\overline{\overline{A}}$:

$$S_B^{\overline{\overline{A}}} \qquad \underbrace{(A\to\overline{\overline{A}})}_{\alpha_1}\to\underbrace{(A\to A)}_{\beta_1}.$$

5. Но α_1, есть аксиома 2 из группы IV. Применим к полученной формуле правило заключения $\dfrac{\alpha_1,\alpha_1\to\beta_1}{\beta_1}$, т.е. $A\to A$.

Говорят, что формула β выводима из формул α_1, α_2, ..., α_n, если формулу β можно вывести путем правила заключения, приняв за исходные формулы α_1, α_2, ..., α_n и все истинные в исчислении высказываний формулы. Выводимость формулы β из формул α_1, α_2, ..., α_n записывают в виде α_1, α_2, ..., $\alpha_n\beta$.

5.4.Теорема дедукции

Если формула β выводима из формул α_1, α_2, ..., α_n, то выводимой является формула $\alpha_1\to(\alpha_2\to(...(\alpha_n\to\beta)...))$, т.е.

$$\frac{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\beta}{(\alpha_1\to(\alpha_2\to(...(\alpha_n\to\beta)...)))}.$$

Теорема дедукции дает возможность установить выводимость различных формул исчисления высказываний более простым путем, чем непосредственный вывод этих формул из аксиом с помощью правил вывода. С помощью теоремы дедукции выводятся основные правила исчисления высказываний:

1. Правило силлогизма. Если формулы $(\alpha\to\beta)$ и $(\beta\to\gamma)$ истинны, то формула $(\alpha\to\gamma)$, т.е. $\dfrac{(\alpha\to\beta),\ (\beta\to\gamma)}{(\alpha\to\gamma)}$;

2. Правило перестановки посылок. Если формула $(\alpha\to(\beta\to\gamma))$ истинна, то истинной является формула $(\beta\to(\alpha\to\gamma))$, т.е. $\frac{(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{(\beta\to(\alpha\to\gamma))}$;

3. Правило соединения посылок. Если истинной является формула $(\alpha\to(\beta\to\gamma))$, то истинной будет формула $(\alpha\wedge\beta\to\gamma)$, т.е. $\frac{(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{(\alpha\wedge\beta\to\gamma)}$.

5.5. Проблемы непротиворечивости, полноты, независимости аксиом исчисления высказываний

Используем алгебру высказываний как некоторую модель исчисления высказываний. Формулы исчисления высказываний будем трактовать как формулы алгебры высказываний. Для этого все буквы, входящие в алфавит исчисления высказываний, будем считать переменными высказываниями в содержательном смысле, т.е. переменными, принимающими значения И и Л. Символы алфавита $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\overline{\ }$, будем понимать как логические связки алгебры высказываний.

При этом справедлива следующая *теорема*.

Все аксиомы исчисления высказываний есть тождественно истинные формулы алгебра высказываний. Все формулы, выводимые из аксиом исчисления высказываний, есть тождественно истинные формулы алгебры высказываний.

Доказательство первой части теоремы можно провести непосредственной проверкой.

В справедливости второй части теоремы можно убедиться, доказав, что, применяя правило заключения и правило подстановки к тождественно истинной формуле алгебры высказываний, получаем тождественно истинную формулу. Итак, всякая выводимая в исчислении высказываний формула есть тождественно истинная формула алгебры высказываний.

При рассмотрении любой формальной логической системы, в том числе исчисления высказываний, возникает три проблемы: непротиворечивость, полнота, независимость системы аксиом исчисления.

Логическое исчисление считается непротиворечивым, если в нем не выводимы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Проблема не противоречивости состоит в том, что следует выяснить, является данное исчисление непротиворечивым.

Если в исчислении можно вывести некоторую формулу α и ее отрицание $\overline{\alpha}$, то такое исчисление будет противоречивым. Если логическое исчисление противоречиво, в нем будет выводима любая формула. Такое исчисление не представляет ценности, т.к. оно не способно отображать в себе различие между истиной и ложью.

Для доказательства непротиворечивости логического исчисления достаточно найти в нем хотя бы одну невыводимую формулу. В исчислении высказываний проблема непротиворечивости решается так.

Теорема I. Исчисление высказываний непротиворечиво.

Справедливость этого утверждения следует из предыдущей теоремы. В самом деле, пусть α - некоторая выводимая в исчислении высказываний формула. Следовательно, она тождественно истинна, если ее рассматривать как содержательную формулу алгебры высказываний. Тогда $\overline{\alpha}$ - тождественно ложна, т.е. не выводима при всех значениях входящих в нее переменных. Следовательно, α и $\overline{\alpha}$ не могут быть вместе выводимыми в исчислении высказываний.

Итак, любая выводимая формула в исчислении высказываний является тождественно истинной, если эту формулу исчисления высказываний рассматривать как содержательную формулу алгебры высказываний. Возникает обратная задача.

Будет ли любая тождественно истинная формула алгебры высказываний выводима из аксиом исчисления высказываний.

Эта задача представляет собой проблему полноты исчисления высказываний в широком смысле.

Для любой логической системы определение полноты в широком смысле слова можно сформулировать следующим образом: логическое исчисление называется полным, если всякую истинную в содержательном смысле формулу можно вывести по правилам исчисления из аксиом исчисления.

Для исчисления высказываний проблема полноты решается положительно.

Теорема II. Система исчисления высказываний является полной.

Не менее важным является определение полноты логической системы в узком смысле слова. Логическое исчисление называется полным в узком смысле слова, если добавление к системе аксиом некоторой невыводимой в этом исчислении формулы делают исчисление противоречивым. Исчисление высказываний является полным также в узком смысле слова.

Для любой логической системы возникает проблема независимости аксиом данного исчисления. Зададимся вопросом, можно ли какую-либо аксиому исчисления вывести из остальных аксиом с помощью правил вывода данной системы. Если это возможно, то аксиому, выводимую из других аксиом, можно вычеркнуть из списка аксиом данного исчисления. Аксиома, невыводимая из остальных аксиом, называется независимой из этих аксиом. Система аксиом, в которой ни одна аксиома не выводима из остальных, называется независимой системой аксиом.

Эта проблема для исчислений решается положительно.

Теорема III. Система аксиом исчисления высказываний независима.

Проблема независимости системы аксиом логического исчисления является весьма важной математической проблемой, приводящей иногда к вопросу о замене какой-либо аксиомы ее отрицанием. В качестве примера можно привести вопрос о независимости пятого постулата Евклида в системе аксиом геометрии, вопрос о независимости аксиомы Цермело в системе аксиом теории множеств. Вопросы эти имели большое значение в развитии математики.

Тренировочные задания к разделу 5	Решение

1. Построить наиболее простую формулу по функции f.

x	y	z	f
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Решение. Т.к. функция содержит три единицы и пять нулей, строим СДНФ:

$$S = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Преобразуем S, используя закон дистрибутивности.

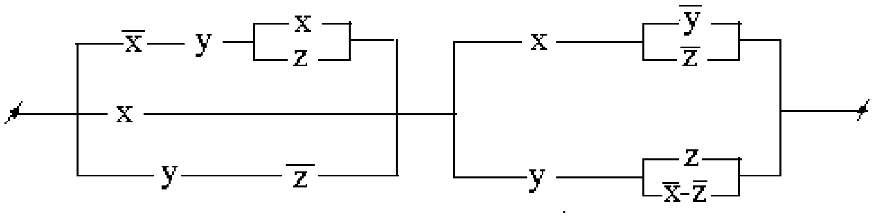
а) $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{y}(z \vee \bar{z}) = \bar{x}\bar{y}$

$S = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} = \bar{y}(x\bar{z} \vee \bar{x})$

б) $\bar{x} \vee x\bar{z} = \bar{x} \vee \bar{z}$

$S = \bar{y}(\bar{x} \vee \bar{z})$

2. Упростить релейно-контактную схему:



Решение. Запишем формулу, соответствующую данной схеме и преобразуем ее.

$$S = (\bar{x}y(x \vee z) \vee x \vee y\bar{z})(x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee y(\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}))$$

а) $\underline{\cancel{\bar{x}}y(x \vee z)} \vee \underline{x} \vee y\bar{z} = y(x \vee z) \vee x \vee y\bar{z} = \underline{\cancel{x}y} \vee yz \vee \underline{x} \vee y\bar{z} =$

$= x \vee y(z \vee \bar{z}) = x \vee y$

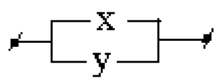
$x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee y(\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}) = x\bar{y} \vee \underline{x\bar{z}} \vee yz \vee \underline{\bar{x}y\bar{z}} = (x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee x\bar{y} \vee yz =$

б) $= z(x \vee \cancel{\bar{x}}y) \vee x\bar{y} \vee yz = x\bar{z} \vee \underline{y\bar{z}} \vee x\bar{y} \vee \underline{yz} = x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee y(z \vee \bar{z}) =$

$= \underline{y} \vee \underline{x\cancel{\bar{y}}} \vee x\bar{z} = x \vee y \vee \underline{\cancel{x}\bar{z}} = x \vee y$

$S = (x \vee y)(x \vee y) = x \vee y$

Схема соответствует этой формуле:



Тренировочные задания к разделу 5	Решение
3. Выводима ли формула исчисления высказываний $(A \wedge B) \to (B \to A)$? Если да, то вывести ее из аксиом исчисления высказываний.	1. Запишем аксиому три второй группы $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$ 2. Применим правило подстановки $S_A^{A \wedge B}$: $(A \wedge B \to B) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C))$ 3. Еще раз применим правило подстановки S_C^A: $\underbrace{(A \wedge B \to B)}_{\alpha} \to \underbrace{((A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to B \wedge A))}_{\beta}$ 4. Затем применим правило заключения $\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$, то есть $\underbrace{(A \wedge B \to A)}_{\alpha_1} \to \underbrace{(A \wedge B \to B \wedge A)}_{\beta_1}$, так как $\alpha = A \wedge B \to B$ вторая аксиома второй группы. 5. Вновь применим правило заключения $\frac{\alpha_1, \alpha_1 \to \beta_1}{\beta_1}$, то есть $(A \wedge B \to B \wedge A)$, так как $\alpha_1 = A \wedge B \to B$ – первая аксиома второй группы. Итак, данная формула выводима. Но ответ о выводимости формулы можно дать и без ее вывода. Данная формула выводима, так как если ее рассматривать как формулу алгебры высказываний, она тождественно истинна.

Тест

1. Сколько слагаемых содержит СДНФ, построенная по функции $f(x_1, x_2, x_3)$ заданной так, что на всех наборах значений переменных x_1, x_2, x_3 она принимает значение 1?

   а) 2;
   б) 4;
   в) 8.

2. Сколько сомножителей содержит СКНФ, построенная по функции $f(1,1,1) = f(1,0,1) = 0$?

   а) 2;
   б) 4;
   в) 8.

3. Можно ли для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ заданной так, что на всех наборах значений переменных x_1, x_2, x_3 она принимает значение 0, построить какую-либо совершенную нормальную форму?

   а) можно СДНФ;
   б) можно СКНФ;
   в) нельзя построить ни одной совершенной нормальной формы.

4. Можно ли некоторое высказывание записать в виде релейно-контактной схемы?

   а) да;
   б) нет;
   в) иногда можно, иногда нет.

5. Могут ли две релейно-контактные схемы, соответствующие одной и той же функции проводимости, иметь различное число реле?

   а) да;
   б) нет;
   в) никогда не могут.

6. Имеем формулу β, выводимую из формул $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, т.е. $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \vdash \beta$. Являются ли выводимыми формулы $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$?

   а) да;
   б) нет;
   в) некоторые из них выводимы, некоторые нет.

7. Если формула β выводима из аксиом исчисления высказываний, какой она является как формула алгебры высказываний?

а) β тождественно истинной;
б) β тождественно ложной;
в) β - переменное высказывание.

8. Является ли противоречивым некоторое исчисление (формальная аксиоматическая система), если оно имеет некоторую содержательную интерпретацию?

а) противоречиво;
б) непротиворечиво;
в) может быть и тот и другой вариант.

9. Формула β есть тождественно истинная формула алгебры высказываний. Будет ли β выводима из аксиом как формула исчисления высказываний?

а) β выводима;
б) β невыводима;
в) может быть и тот и другой вариант.

10. Можно ли какую-либо аксиому исчисления высказываний вывести из остальных аксиом?

а) некоторую аксиому можно, некоторую нельзя;
б) все можно;
в) все нельзя.

Вопросы для самопроверки

1. Сколько несобственных подмножеств имеет конечное множество, состоящее из n элементов?

а) 1;

б) 2;

в) n.

2. Сколько собственных подмножеств имеет конечное множество $X=\{x_1, x_2, x_n\}$?

а) n-1;

б) $n \times n = n^2$;

в) $2^n - 2$.

3. В каком порядке нужно производить операции, преобразовывая формулу $S = A \cap B \cup C \cap \overline{B} \cup A$?

а) $(A \cap (B \cup C) \cap \overline{B}) \cup A$;

б) $(A \cap B) \cup (C \cap (\overline{B} \cup A))$;

в) $(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B}) \cup A$.

4. Пусть $n(A \cup B)$ - мощность множества, являющегося объединением конечных множеств A и B, $m_1 = n(A \cup B)$, если множества пересекаются, т.е. $A \cap B \neq 0$ и $m_2 = n(A \cup B)$, если $A \cap B = 0$. Равны ли мощности m_1 и m_2?

а) $m_1 = m_2$;

б) $m_1 > m_2$;

в) $m_1 < m_2$.

5. Мощность какого множества больше X или Y, если X - исходное конечное множество, Y - множество подмножеств множества X?

а) мощность X больше мощности Y;

б) мощность X меньше мощности Y;

в) мощность X равно мощности Y.

6. Существует ли среди бесконечных множеств множества наименьшей и наибольшей мощности?

а) существуют множества как наибольшей, так и наименьшей мощности;

б) существует множество наибольшей, а наименьшей мощности нет;

в) существует множество наименьшей, а наибольшей мощности нет.

7. Является ли сюръективное отображение инъективным?

а) сюръективное отображение всегда инъективно;

б) сюръективное отображение - неинъективно;

в) сюръективное отображение может быть инъективным, но может и не быть им.

8. Всегда ли биективное отображение сюръективно?
   а) всегда;
   б) никогда;
   в) может быть сюръективным, но может и не быть им.

9. Когда сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств является конечным множеством?
   а) в случае конечного числа суммы счетных множеств;
   б) в случае счетного числа суммы конечных множеств;
   в) в случае конечного числа суммы конечных множеств.

10. Если к некоторому бесконечному множеству M прибавить счетное множество A, будет ли отличаться мощность полученного множества $M \cup A$ от мощности множества M?
   а) мощность множества M равна мощности множества $M \cup A$;
   б) мощность множества M меньше мощности множества $M \cup A$;
   в) мощность множества M больше мощности множества $M \cup A$.

11. Может ли конечное множество A содержать собственное подмножество, эквивалентное всему множеству A
   а) всегда содержит;
   б) никогда не содержит;
   в) иногда содержит, иногда нет.

12. Отсутствием какого из свойств отношений отличаются отношение толерантности от отношения эквивалентности?
   а) рефлексивности;
   б) симметрии;
   в) транзитивности.

13. Какие из высказываний S_1, S_2, S_3, состоящих из двух элементарных A и B, равносильны?
   S_1: “Если A, то не B”.
   S_2: “A или не B”.
   S_3: ”Неверно, что A и B”.

   а) $S_1=S_2$;
   б) $S_1=S_3$;
   в) $S_2=S_3$.

14. Что означает высказывание “A только, если B”?
   а) A достаточно для B;

б) А необходимо для В;
в) А необходимо и достаточно для В.

15. Чему равносильна конъюнкция импликации и ее конверсии?
а) контроппозиции;
б) конверсии контроппозиции;
в) двойной импликации.

16. Какая формула соответствует функции $f(x_1, x_2)$: $f(1,1)=1$?
а) $x_1 \to x_2$;
б) $x_1 \lor x_2$;
в) $x_1 \land x_2$.

17. Какие из переменных функций $f(x_1, x_2)$ являются существенными, если $f(x_1, x_2)$: $f(1,i)=0$
а) x_1;
б) x_1;
в) обе переменные фиктивны.

18. С помощью какой связки можно записать любую формулу алгебры высказываний?

а) с помощью дьзъюнкции;
б) с помощью конъюнкции;
в) с помощью штриха Шеффера.

19. Если множество истинности высказывания А есть подмножество множества истинности высказывания В, существует ли отношения следствия между А и В?

а) из А следует В;
б) из В следует А;
в) ни одного из них не следует из другого.

20. Если высказывания А и В несовместимы, что можно утверждать о множествах истинности этих высказываний?

а) множество истинности А есть подмножество множества истинности высказывания В;
б) множества истинности А и В совпадают;
в) множество истинности А и В не пересекаются.

21. Если высказывания А и В несовместимы, существует ли между ними отношение следствия?

а) из А следует В;
б) из В следует А;
в) ни одного из них не следует из другого.

22. Если при проверке правильности рассуждения получен результат $P \to Q \not\equiv 0$, где P - конъюнкция посылок, Q - заключение. Означает ли это, что рассуждение правильно?

а) да;
б) нет;
в) может быть правильным в одних случаях и неправильным в других.

23. Каково максимальное число слагаемых СДНФ для формулы $S(x_1, \ldots x_n) \equiv 1$?
а) n;
б) n^2;
в) 2^n.

24. Каково максимальное число сомножителей СКНФ невыполнимой формулы $S(x_1, \ldots x_n)$?
а) n;
б) n^2;
в) 2^n.

25. Если СДНФ формулы $S(x_1, x_2, x_3)$ содержит 3 слагаемых, сколько сомножителей содержит ее СКНФ?
а) 3;
б) 4;
в) 5.

26. Соответствуют ли различные релейно-контактные схемы одному и тому же высказыванию?
а) всегда;
б) никогда;
в) могут соответствовать, могут не соответствовать.

27. Могут ли равносильные высказывания быть записаны в виде некоторой релейно-контактной схемы?
а) да;
б) нет;
в) могут, но не всегда.

28. Если исчисление противоречиво, имеет ли оно некоторую содержательную интерпретацию?
а) имеет;

б) не имеет;
в) имеет, но не всегда.

29. Если исчисление является полным, можно ли какую-либо невыводимую в этом исчислении формулу добавить к аксиомам так, чтобы исчисление осталось непротиворечивым?
а) можно;
б) нельзя;
в) можно, но не всегда.

30. Если система аксиом некоторого исчисления независима, можно ли какие-либо аксиомы вывести из других?
а) можно;
б) нельзя;
в) можно, но не всегда.

Литература

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и теорию функций. - М.: Наука, 1977 г.
2. Гаврилов Г. П. Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по курсу «Дискретная математика». - М.: Наука, 1992 г.
3. Грей П. Логика, алгебра и базы данных. –М.: Машиностроение, 1989 г.
4. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. - М.: Наука, 1972г.
5. Колмогоров А. Н. Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989 г.
6. Клини С. Математическая логика. - М.: Мир, 1973.
7. Ковалева Л. Ф. Данков О. Ю. Горбовцов Г. Я. Мокеева И. К. Дискретная математика. - М.: МЭСИ, 1988.
8. Новиков Н. С. Элементы математической логики. - М.: Наука, 1973.
9. Под редакцией Скорнякова Л.А. Общая алгебра II, М.: Наука, 1990г.
10. Эдельман С. Л. Математическая логика. - М.: Высшая школа, 1975.
11. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979.